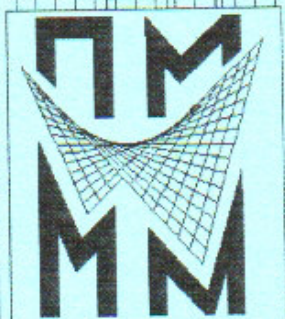


ISSN 2074-5893



До 100-річчя  
Дніпровського  
національного університету  
імені Олеся Гончара  
(1918-2018)

ПИТАННЯ

ПРИКЛАДНОЇ

МАТЕМАТИКИ

І

МАТЕМАТИЧНОГО

МОДЕЛЮВАННЯ

2018

ISSN 2074-5893

**Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет  
імені Олеся Гончара**

**ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Збірник наукових праць**

**Випуск 18**

До 100-річчя  
Дніпровського національного  
університету  
імені Олеся Гончара  
(1918-2018)

**Дніпро  
ЛІРА  
2018**

УДК 004, 517, 519, 539, 51-76  
ББК 22.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431  
П 32

*Надруковано за рішенням Вченої ради  
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара*

**П 32 Питання прикладної математики і математичного моделювання [Текст]: зб. наук. пр. / редкол.: О. М. Кісельова (відп. ред.) [та ін.]. – Д., 2018. – Вип. 18. – 208 с.**

**Рецензенти:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**  
д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Б. Вакарчук**

У збірнику вміщено результати фундаментальних та прикладних досліджень із проблем математичного моделювання складних систем, розробки і програмної реалізації ефективних обчислювальних методів та алгоритмів розв'язання актуальних задач оптимізації, математичної фізики та системного аналізу. Призначений для науковців в галузі прикладної математики, викладачів ЗВО, аспірантів та студентів.

В сборнике помещены результаты фундаментальных и прикладных исследований по проблемам математического моделирования сложных систем, разработки и программной реализации эффективных вычислительных методов и алгоритмов решения актуальных задач оптимизации, математической физики и системного анализа. Предназначен для ученых в области прикладной математики, преподавателей, аспирантов и студентов.

The collection of scientific papers contains the results of fundamental and applied research on the problems of mathematical modeling of complex systems, the development and software implementation of effective computational methods and algorithms for solving actual problems of optimization, mathematical physics and system analysis. It is intended for scientists in the field of applied mathematics, teachers of higher education establishments, postgraduate students and students.

УДК 004, 517, 519, 539, 51-76  
ББК 2.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431

**Редакційна колегія:**

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.М. Кісельова** (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, доц. **Л.Л. Гарт** (заст. відп. ред.); чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **Ю.Г. Стоян**; д-р техн. наук, проф. **Т.Є. Романова**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **П.І. Когут**; д-р техн. наук, проф. **О.І. Михальов**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Дейнеко** (Велика Британія); д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. Мельников** (США); PhD **О. Блюсс** (Велика Британія); канд. екон. наук, доц. **О.М. Притоманова** (відп. секр.).

**ISSN 2074-5893**

**doi: 10.15421/32181801**

© Дніпровський національний університет  
імені Олеся Гончара, 2018

**Л.Т. Бойко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **АЛГОРИТМ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МЕЖОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ПРИКЛАДІ МІШАНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА**

На прикладі двовимірного рівняння Пуассона обговорюються можливості алгоритму застосування методу межових елементів до розв'язування крайових задач. Алгоритм детально розглянуто на прикладі мішаної крайової задачі. Виконана програмна реалізація алгоритму та на тестовому прикладі показані результати його роботи.

**Ключові слова:** метод межових елементів, рівняння Пуассона, задача Діріхле, задача Неймана, мішана крайова задача.

На примере двумерного уравнения Пуассона проанализированы возможности алгоритма применения метода граничных элементов к решению краевых задач. Алгоритм подробно рассмотрен на примере смешанной краевой задачи. Выполнена программная реализация алгоритма и на тестовом примере показана его работа.

**Ключевые слова:** метод граничных элементов, уравнение Пуассона, задача Дирихле, задача Неймана, смешанная краевая задача.

The possibilities of the algorithm for applying the boundary element method to solving boundary value problems are discussed on the example of the two-dimensional Poisson differential equation. The algorithm does not change significantly when the type of boundary conditions changes: the Dirichlet problem, the Neumann problem, or a mixed boundary value problem. The idea of the algorithm is taken from the work of John T. Katsikadelis [1]. The algorithm is described in detail in the next sequence of actions. 1) The boundary-value problem for a two-dimensional finite domain is formulated. The desired function in the domain, its values, and its normal derivative on the boundary contour are connected by means of the second Green formula. 2) We pass from the boundary value problem for the Poisson equation to the boundary value problem for the Laplace equation. This simplifies the process of constructing an integral equation. We obtain the integral equation on the boundary contour using the boundary conditions. 3) In the integral equation, we divide the boundary contour into a finite number of boundary elements. The desired function and its normal derivative are considered constant values on each boundary element. We compose a system of linear algebraic equations considering these values. 4) We modify the system of linear algebraic equations taking into account the boundary conditions. After that, we solve it using the Gauss method.

The computer program has been developed according to the developed algorithm. We used it in the learning process. The software implementation of the algorithm takes into account the capabilities of modern computer technology and modern needs of the educational process. The work of the program is shown in the test case. Further modification of the described algorithm is possible.

**Keywords:** boundary element method, Poisson equation, Dirichlet problem, Neumann problem, mixed boundary value.



**Вступ.** Метод межових елементів (ММЕ) є сучасним чисельним методом, який почав активно розвиватися і використовуватися з появою та розвитком обчислювальної техніки. Основна ідея методу полягає у представленні шуканого розв'язку диференціального рівняння в області  $G$  у вигляді інтегралу по контуру (або поверхні), що обмежує цю область. Таке представлення дозволяє точно задовольнити диференціальне рівняння в області  $G$ , а на межовому контурі (або поверхні) з крайових умов добути інтегральне рівняння. Таким способом ММЕ зменшує вимірність задачі на одиницю, цього не робить метод скінчених елементів (МСЕ). Отже, ММЕ потребує меншого об'єму обчислювальної роботи у порівнянні з МСЕ.

Оскільки представляти шукану функцію в області  $G$  через її значення на межовому контурі можна по-різному, то виникають різні алгоритми застосування ММЕ. Основні складності ММЕ зосереджені у розв'язуванні інтегрального рівняння. На початку свого розвитку ММЕ використовувався до розв'язування або задачі Діріхле, або задачі Неймана. Однак, за останні 15-20 років почали з'являтися роботи, в яких автори розробляли підходи до використання ММЕ при розв'язуванні мішаної крайової задачі.

В даній роботі аналізується один із алгоритмів, який дозволяє використовувати ММЕ до розв'язування як крайових задач Діріхле або Неймана, так і мішаної крайової задачі. Розглядається лише двовимірна задача. Ідея алгоритму взята з роботи [1], його програмна реалізація адаптована до можливостей сучасної обчислювальної техніки та сучасних потреб навчального процесу.

Подальше викладання алгоритму розіб'ємо на **чотири кроки**.

**1.Формулювання задачі та формули Гріна.** В скінченній двовимірній області  $G$ , обмеженій кусково-гладким контуром  $L = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\emptyset\}$ , розглянемо мішану крайову задачу для рівняння Пуассона (рис. 1).

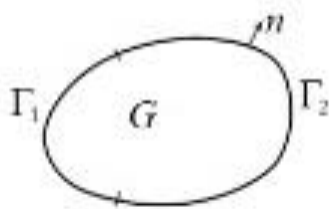


Рис. 1. Область  $G$

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in G; \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y); \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y). \quad (3)$$

Тут позначено:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – диференціальний оператор Лапласа;

$f(x, y) \in C(G)$ ,  $\varphi_1(x, y) \in C(\Gamma_1)$ ,  $\varphi_2(x, y) \in C(\Gamma_2)$  – відомі функції;  
 $u(x, y) \in C^{(2)}(G)$  – шукана функція в області  $G$ ;  $n$  – зовнішня нормаль до межового контуру  $L$ .

Вважаємо, що коли  $\Gamma_1 = L$ ,  $\Gamma_2 = \{\emptyset\}$ , то задача (1), (2), (3) стає задачею Діріхле (1), (2); коли  $\Gamma_2 = L$ ,  $\Gamma_1 = \{\emptyset\}$ , то задача (1), (2), (3) стає задачею Неймана (1), (3). В останньому випадку припускаємо, що виконується умова розв'язності задачі Неймана [2]:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_L \varphi_2(l) dl.$$

Далі, пояснюючи алгоритм на прикладі мішаної крайової задачі, будемо пам'ятати, що його можна застосовувати також і до задачі Діріхле, і до задачі Неймана.

Алгоритм базується на використанні другої формули Гріна [1, 2]

$$\iint_G (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dx dy = \int_L \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl. \quad (4)$$

У формулі (4) функції  $u$  та  $v$  мають бути визначеними та неперервними разом із похідними до другого порядку включно в області  $G$  і до першого порядку включно на контурі  $L$ . В усьому іншому вони довільні.

В якості функції  $v$  виберемо таку функцію:

$$v(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r, \text{ де } r = |P(x, y) - P_0(x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (5)$$

У формулі (5)  $P_0(x_0, y_0)$  – фіксована, а  $P(x, y)$  – довільна точка на двовимірній площині. Функція  $v(P, P_0)$  задовольняє диференціальне рівняння Лапласа по координатах точки  $P(x, y)$  при  $P \neq P_0$ .

Підставимо (5) в (4) і в залежності від розташування фіксованої точки  $P_0$  відносно області  $G$  добудемо таку залежність [1, 2]:

$$\varepsilon(P_0) \cdot u(P_0) = \iint_G v(P, P_0) \cdot \Delta u dx dy + \int_L \left( u \cdot \frac{\partial v(P, P_0)}{\partial n_p} - v(P, P_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial n_p} \right) dl, \quad (6)$$

де коефіцієнт  $\varepsilon(P_0)$  визначається формулою

$$\varepsilon(P_0) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } P_0 \in G; \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } P_0 \in L; \\ 0, & \text{якщо } P_0 \notin \bar{G}. \end{cases} \quad (7)$$

У роботі [2] формулу (6) називають третьою формулою Гріна.

У правій частині формули (6) інтегрування і диференціювання відбувається по координатах точки  $P(x, y)$ . Координати точки  $P_0(x_0, y_0)$  відіграють роль параметрів. Для простоти припускаємо, що, якщо точка  $P_0(x_0, y_0)$  розташована на контурі  $L$ , то вона не є кутковою точкою контуру або точкою, де крайові умови змінюють тип.

Вважаємо, що у формулі (6) функція  $u$  – це шуканий розв'язок задачі (1), (2), (3). Однак, у правій частині рівності (6) присутній інтеграл по області  $G$ . Хоча підінтегральна функція цього інтеграла є відомою в області  $G$  з умов

(1), (5), його обчислення створює додаткові незручності при чисельній реалізації ММЕ. Щоб уникнути цих незручностей, перейдемо від задачі (1), (2), (3) до відповідної задачі для рівняння Лапласа.

**2. Перехід від рівняння Пуассона до рівняння Лапласа.** Розв'язок диференціального рівняння Пуассона шукатимемо у вигляді суми двох функцій

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u_q(x, y). \quad (8)$$

Тут  $u_0(x, y)$  – загальний розв'язок диференціального рівняння Лапласа, тобто  $\Delta u_0(x, y) = 0$ ;  $u_q(x, y)$  – частинний розв'язок диференціального рівняння Пуассона, тобто  $\Delta u_q = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ . Якщо функція  $u_q(x, y)$  знайдена, то від крайової задачі (1), (2), (3) можна перейти до крайової задачі для пошуку  $u_0(x, y)$ .

$$\Delta u_0 = 0, \quad (x, y) \in G; \quad (9)$$

$$u_0|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y) - u_q|_{\Gamma_1} \equiv \bar{u}_0; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y) - \left. \frac{\partial u_q}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} \equiv \bar{u}_{0n}. \quad (11)$$

Для пошуку розв'язку крайової задачі (9), (10), (11) звертаємось до формули (6). Тепер ця формула набуде вигляду:

$$\varepsilon(P_0) \cdot u_0(P_0) = \int_L \left( u_0 \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial n_P} \right) dl. \quad (12)$$

Тут коефіцієнт  $\varepsilon(P_0)$  залишається визначеним за формулою (7).

Далі для простоти запису у функції  $u_0(x, y)$  формул (9) – (12) індекс нуля не будемо писати, пам'ятаючи при цьому, що мова йде про розв'язок диференціального рівняння Лапласа. Крім цього, на контурі  $L$  позначатимемо через  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}_n$  відомі значення функцій  $u$  та  $\frac{\partial u}{\partial n}$  відповідно, а через  $u$ ,  $u_n$  – невідомі значення тих же функцій.

Якщо  $P_0 \in G$ , то у формулі (7)  $\varepsilon(P_0) = 1$ , і (12) перетворюється в інтегральну формулу для шуканого розв'язку крайової задачі (9), (10), (11) у будь-якій точці  $P_0 \in G$ .

$$u(P_0) = \int_{\Gamma_1} \left( \bar{u} \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot u_n \right) dl + \int_{\Gamma_2} \left( u \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot \bar{u}_n \right) dl. \quad (13)$$

Однак, у правій частині рівності (13) під знаком інтеграла із двох функцій  $u$  та  $\frac{\partial u}{\partial n}$  відомою на межевому контурі є лише якась одна. Тому користуватися формулою (13) для обчислення розв'язку  $u(P_0)$  поки неможливо.

Для визначення невідомих контурних функцій складемо інтегральні рівняння. Для цього у формулі (12) вибираємо  $P_0 \in L$ , вважаючи контур  $L$  гладким в околі точки  $P_0$  (це значить, що  $\varepsilon(P_0) = \frac{1}{2}$ ), та напишемо формулу (12) у такому вигляді:

$$\frac{1}{2}u(P_0) = \int_L \left( u(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \right) dl. \quad (14)$$

На залежність (14) можна дивитись як на межеве інтегральне рівняння з невідомими функціями (або  $u$ , або  $\frac{\partial u}{\partial n}$ ) на контурі  $L$ . Функція  $v(P_0, P)$  та її нормальна похідна є відомими.

Якщо розв'язується задача Діріхле (тобто на всьому контурі  $L$  задана лише умова (2)), то інтегральне рівняння (14) стає таким:

$$\frac{1}{2}\bar{u}(P_0) = \int_L \left( \bar{u}(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot u_n(P) \right) dl, \quad P, P_0 \in L. \quad (15)$$

В інтегральному рівнянні (15) шуканою є функція  $u_n(P)$ . Рівняння (15) – це лінійне інтегральне рівняння першого роду.

Якщо розв'язується задача Неймана (тобто на всьому контурі  $L$  задана лише умова (3)), то інтегральне рівняння (14) набуде вигляду:

$$\frac{1}{2}u(P_0) = \int_L \left( u(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot \bar{u}_n(P) \right) dl, \quad P, P_0 \in L. \quad (16)$$

Шуканою в інтегральному рівнянні (16) є функція  $u$ . Це лінійне інтегральне рівняння другого роду.

У випадку мішаної крайової задачі інтегральне рівняння (14) буде мати різний вигляд в залежності від розташування точки  $P_0$  на контурі  $L$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{u}(P_0) &= \int_{\Gamma_1} \left( \bar{u}(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot u_n(P) \right) dl + \\ &+ \int_{\Gamma_2} \left( u(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n_P} - v(P_0, P) \cdot \bar{u}_n(P) \right) dl, \quad \text{якщо } P_0 \in \Gamma_1; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(P_0) &= \int_{\Gamma_1} \left( \bar{u}(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n} - v(P_0, P) \cdot u_n(P) \right) dl + \\ &+ \int_{\Gamma_2} \left( u(P) \cdot \frac{\partial v(P_0, P)}{\partial n} - v(P_0, P) \cdot \bar{u}_n(P) \right) dl, \quad \text{якщо } P_0 \in \Gamma_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Далі на варіанті мішаної крайової задачі розглянемо наближений метод розв'язування системи інтегральних рівнянь (17), (18).

**3. ММЕ зі сталими межовими елементами.** Межовий контур  $L$  розбиваємо на  $N$  сегментів. Точки розбиття  $L$  на сегменти будемо називати



крайовими точками (рис. 2). Ділити  $L$  на сегменти будемо так, щоб усі кутові точки контуру  $L$  та точки, де крайові умови змінюють тип, попали у множину крайових точок. На кожному сегменті виконаємо два види апроксимації. Одна стосується геометричної форми контуру, інша – значення шуканої функції та її нормальної похідної на контурі.

У випадку сталих елементів межовий сегмент апроксимуємо відрізком, який будемо називати межовим елементом (МЕ) і який з'єднує крайові точки. В середині цього відрізка розташовуємо вузол і межову функцію приймаємо сталою вздовж МЕ і рівною значенню цієї функції у вузловій точці.

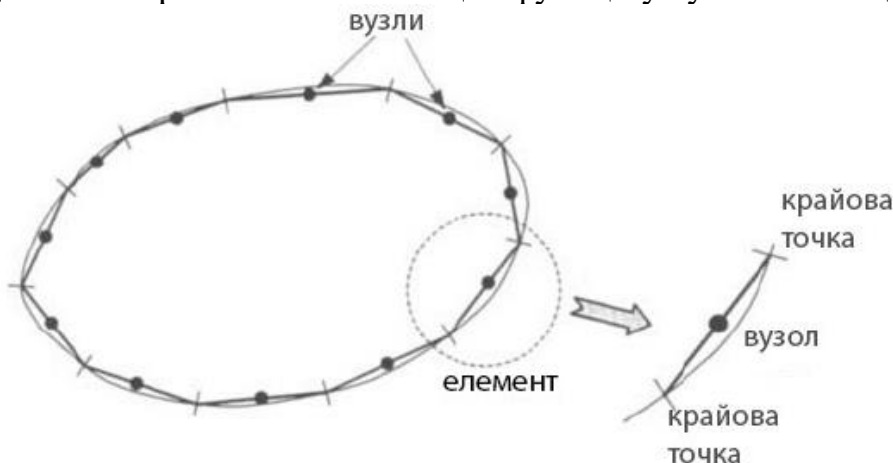


Рис. 2. Дискретизація межового контуру, сталий МЕ

Сталі елементи зображують межові функції та їх нормальні похідні значеннями, розривними від елемента до елемента [1].

Перенумеруємо  $N$  сталих МЕ у додатному напрямку. Беремо залежність (14), яка відповідає диференціальному рівнянню Лапласа і в якій точка  $P_0$  дорівнює точці  $p_i$ , тобто вузлу на  $i$ -му елементі (рис. 3).

Напишемо (14) у дискретизованому вигляді

$$\frac{1}{2}u^i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(q) \cdot \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} dq - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) \cdot \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} dq, \quad (19)$$

де  $\Gamma_j$  – елемент (прямолінійний відрізок), на якому розташований  $j$ -й вузол і вздовж якого виконується інтегрування по змінній  $q$ ;  $p_i$  – вузлова точка  $i$ -го елемента. Оскільки констант-елемент є гладким в околі вузлових точок, то

$$\varepsilon(P_0) = \varepsilon(p_i) = \frac{1}{2}.$$

За припущенням  $u$  та  $\frac{\partial u}{\partial n}$  є сталими на кожному МЕ, тоді у рівності (19) їх можна винести за знак інтеграла. На  $j$ -му межовому елементі позначимо  $u^j$  та  $u_n^j$  значення  $u$  та  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , відповідно, тоді рівняння (19) можна написати так:

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} dq \right) u^j = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) dq \right) u_n^j. \quad (20)$$

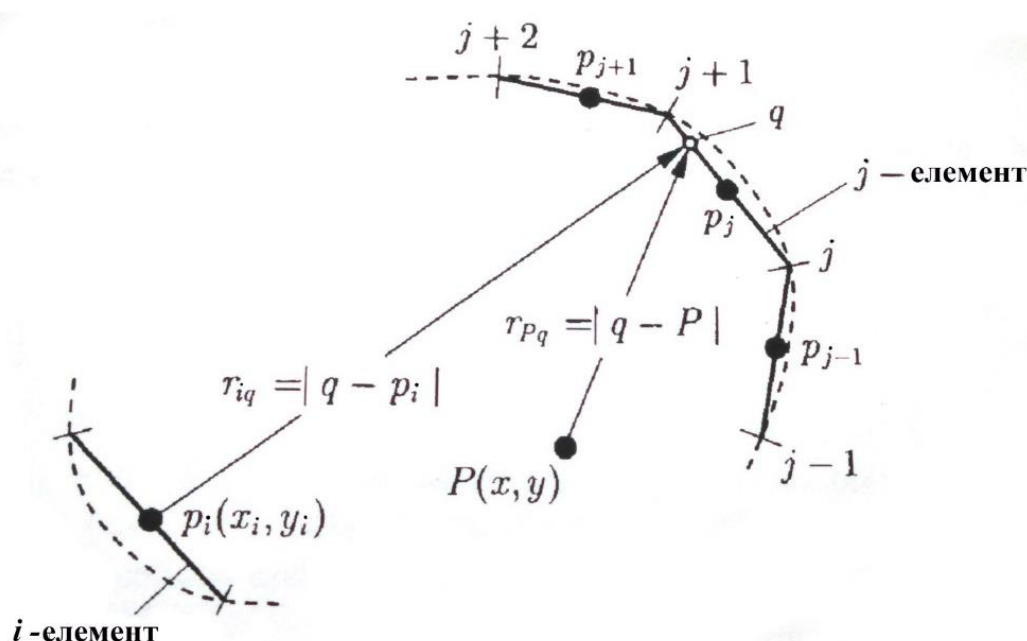


Рис. 3. Схема складання наближених рівнянь, сталий МЕ

Як видно з рис. 3, інтеграли, присутні в рівнянні (20), пов'язують між собою вузол  $p_i$  з вузлами  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Якщо позначити

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial v(p_i, q)}{\partial n_q} dq = \tilde{H}_{ij}; \quad \int_{\Gamma_j} v(p_i, q) dq = G_{ij}, \quad (21)$$

то (20) можна написати у більш простому вигляді

$$-\frac{1}{2}u^i + \sum_{j=1}^N \tilde{H}_{ij} \cdot u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \cdot u_n^j. \quad (22)$$

Далі позначимо  $H_{ij} = \tilde{H}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}$ , де  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$  – символ Кронекера. Це

дозволяє написати рівняння (22) ще простіше

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \cdot u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \cdot u_n^j. \quad (23)$$

Рівняння (23) складаємо для кожного вузла  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) та отримаємо систему  $N$  алгебраїчних рівнянь, які можна написати у матричному вигляді

$$[H]\{u\} = [G]\{u_n\}, \quad (24)$$

де  $[H]$  та  $[G]$  – це  $N \times N$  матриці;  $\{u\}$ ,  $\{u_n\}$  – вектори вимірності  $N$  кожен.

Тепер в залежність (24) слід ввести відомі дані з крайових умов (10), (11).

**4. Урахування крайових умов та розв'язування СЛАР.** Нехай на  $\Gamma_1$  розташовано  $N_1$  сталих елементи, а на  $\Gamma_2$  –  $N_2$  сталих елементи, причому  $N_1 + N_2 = N$ . Це означає, що вектор  $\{u_n\}$  містить  $N_1$  невідомих значень  $u_n$ , а у векторі  $\{u\}$  знаходяться  $N_2$  невідомих значень  $u$ . Треба відокремити в системі (24) відомі значення від невідомих. Для цього будемо ці значення по різному помічати і рівняння (24) напишемо у вигляді

$$[H_1|H_2] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix} = [G_1|G_2] \begin{Bmatrix} \{u_n\}_1 \\ \{\bar{u}_n\}_2 \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Тут  $\{\bar{u}\}_1$ ,  $\{\bar{u}_n\}_2$  – відомі значення на  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  відповідно, а  $\{u\}_2$ ,  $\{u_n\}_1$  – невідомі значення. Матриці  $[H]$  та  $[G]$  розділені на дві частини. У матриці  $[H_1]$  та  $[G_1]$  включено лише  $N_1$  перших стовпчиків матриць  $[H]$  та  $[G]$  відповідно, а у матриці  $[H_2]$  та  $[G_2]$  – всі інші стовпчики від  $N_1+1$  до  $N_1+N_2$ . Рядків у всіх матриць  $[H_1]$ ,  $[G_1]$ ,  $[H_2]$ ,  $[G_2]$  однакова кількість, а саме  $N$ .

Перенесемо в (25) невідомі значення на лівий бік рівності, а відомі – на правий бік.

$$[-G_1|H_2] \begin{Bmatrix} \{u_n\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix} = [-H_1|G_2] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{\bar{u}_n\}_2 \end{Bmatrix}.$$

Для кращого сприйняття останню систему можна написати у більш звичному вигляді

$$[A] \cdot \{X\} = \{B\}, \quad (26)$$

де

$$[A] = [-G_1|H_2], \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} \{u_n\}_1 \\ \{u\}_2 \end{Bmatrix}, \quad \{B\} = [-H_1|G_2] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_1 \\ \{\bar{u}_n\}_2 \end{Bmatrix}.$$

У СЛАР (26)  $[A]$  – квадратна матриця вимірності  $N \times N$ ;  $\{X\}$ ,  $\{B\}$  – вектори вимірності  $N$  кожний.

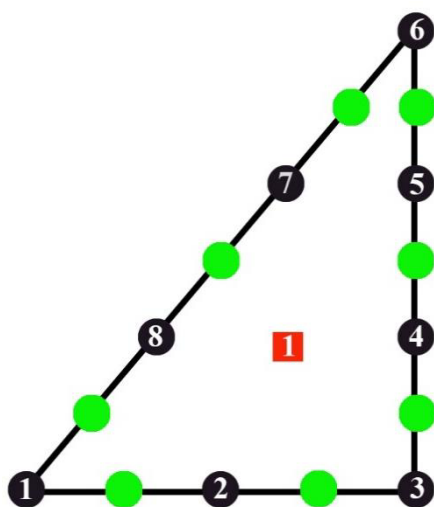
Розв'язавши СЛАР (26) методом Гаусса, будемо знати  $\{u\}$  та  $\{u_n\}$  у всіх вузлах межових елементів контуру  $L$ . Після цього можна обчислити функцію  $u(P)$  у будь-якій внутрішній точці  $P$  області  $G$  (рис. 3). Для цього виберемо формулу (13) (коефіцієнт  $\varepsilon(P_0)=1$ ) та використаємо виконану дискретизацію контуру  $L$ . Добудемо таку розрахункову формулу

$$u(P) = \sum_{j=1}^N \tilde{H}_{ij} \cdot u^j - \sum_{j=1}^N G_{ij} \cdot u_n^j. \quad (27)$$

У правій частині рівності (27) коефіцієнти  $\tilde{H}_{ij}$  та  $G_{ij}$  обчислюємо заново за формулами (21), замінивши координати межевої точки  $p_i$  на координати внутрішньої точки  $P$ .

**Програмна реалізація алгоритму.** За описаним алгоритмом була модифікована фортран-програма LABECON [1]. Нова програма написана сучасною мовою C# в середовищі візуальної розробки програм MS Visual Studio 2013. Цю роботу виконали студенти групи ПА-17м-1 факультету прикладної математики ДНУ ім. О. Гончара Прудко О.П. та Вольфсон О.Я. Новий варіант програми є зручним при використанні у навчальному процесі.

Для тестування програми розглянемо приклад області  $G$  у вигляді



прямокутного рівнобедреного трикутника. Нехай катети цього трикутника складають контур  $\Gamma_1$ , а гіпотенуза є контуром  $\Gamma_2$  (рис. 4). Точками, що позначені номером в колі, розбиваємо межевий контур області на сегменти, які одночасно є межевими елементами. В центрі кожного МЕ розташована точка без номера, це вузол цього МЕ. Внутрішня точка, в якій програма обчислює значення шуканої функції, лише одна, і її номер написано в маленькому квадраті, розташованому в центрі області  $G$ .

Рис. 4. Область  $G$  для прикладу

Вхідними даними для програми є текстовий файл, в який заносимо результати дискретизації межевого контуру області  $G$  (рис. 5).

```
Тест
8
1
0,0 0,25 0,5 0,5 0,5 0,5 0,333 0,1666
0,0 0,0 0,0 0,1666 0,333 0,5 0,333 0,1666
0 0 0 0 0 1 1 1
0,3333
0,1666
```

Рис. 5. Скріншот текстового файлу з вхідними даними прикладу

У другому та третьому рядках текстового файлу вказана загальна кількість межових вузлів – вісім, внутрішня точка одна. Далі записані два рядки з  $x$ - та  $y$ - координатами крайових точок, розташованих на межевому контурі. У наступному рядку вказано тип крайової умови на кожному МЕ: 0 – умова Діріхле; 1 – умова Неймана. Останні два рядки – це  $x$ - та  $y$ - координати однієї внутрішньої точки.



Формулюємо мішану крайову задачу для рівняння Пуассона

$$\Delta u = f(x, y) \equiv 4, \quad (x, y) \in G; \quad (28)$$

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y) \equiv x^2 + y^2; \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y) \equiv (y - x)\sqrt{2}. \quad (30)$$

Щоб перейти від рівняння Пуассона до рівняння Лапласа, вибираємо частинний розв'язок диференціального рівняння Пуассона (28)

$$u_q(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy. \quad (31)$$

Дійсно,  $\Delta u_q(x, y) = 4$ ,  $(x, y) \in G$ . Від функції (31) не вимагаємо ніяких умов на межовому контурі. Використавши представлення (8), переходимо до крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta u_0 = 0, \quad (x, y) \in G; \quad (32)$$

$$u_0|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y) - u_q|_{\Gamma_1} \equiv -2xy; \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y) - \frac{\partial u_q}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} \equiv 0, \quad (34)$$

де вигляд області  $G$  та межових контурів  $\Gamma_1, \Gamma_2$  показано на рис.4.

Частинний розв'язок (31) та праві частини умов Діріхле (33) і Неймана (34) передаємо в програму LABECON (рис. 6).

```
private double Dirihle(double x, double y)
{
    return -2.0 * x * y;
}

private double Neiman(double x, double y)
{
    return 0.0;
}

private double ChastnoeReshenie(double x, double y)
{
    return x * x + y * y + 2 * x * y;
}
```

Рис. 6. Передача функцій тестового прикладу в програму LABECON

Результати тестування показані на рис 7.

Розв'язок у внутрішніх точках

№Точки	X	Y	Uодн	U
1	0,3333	0,1666	-0,11258967...	0,137310335...

Рис. 7. Скріншот результатів розв'язування рівняння Лапласа і Пуассона у внутрішній точці

Розв'язок, добутий програмою LABECON у точці (0.3333; 0.1666), відрізняється від точного у третьому розряді після коми.

Якщо межовий контур розбити на чотирнадцять ME, то в тій же самій внутрішній точці результати, добути програмою LABECON, будуть відрізнятися від точного у п'ятому розряді після коми.

**Висновок.** Програмно реалізований алгоритм був протестований на багатьох прикладах. Тестування підтвердило його зручність при доведенні розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона до числових значень. Похибка наближених результатів можна оцінювати апостеріорним методом.

Планується виконати модифікацію описаного алгоритму стосовно обчислення коефіцієнтів (21). В роботі [1] ці коефіцієнти обчислюються наближено за квадратурними формулами Гаусса. Однак, інтеграли (21) можливо обчислити аналітично, тобто точно. Очікується, що така модифікація алгоритму дозволить пришвидшити роботу програми та підвищити точність результатів.

#### Бібліографічні посилання

1. **Katsikadelis, J.T.** Boundary Elements: Theory and Applications. ELSEVIER, 2002.
2. **Боголюбов, А.Н.** Функция Грина оператора Лапласа [Текст] / А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина. Учебн. пособие – М.: МГУ, 2012. – 130 с.

*Надійшла до редколегії 14.06.2018.*

**Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, О.А. Падалка**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ**

**В даній статті розглядаються системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу з нелінійністю загального вигляду в кожному рівнянні. Досліджуються асимптотичні властивості розв'язків систем з парною та непарною кількістю рівнянь на нескінченному інтервалі часу.**

**Ключові слова:** диференціальне рівняння, відхилення аргументу, нескінченний інтервал часу, асимптотичні властивості.

**В данной статье рассматриваются системы дифференциальных уравнений с отклонением аргумента с нелинейностью общего вида в каждом уравнении. Исследуются асимптотические свойства решений систем с четным и нечетным количеством уравнений на бесконечном интервале времени.**

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, отклонения аргумента, бесконечный интервал времени, асимптотические свойства.

**A lot of natural processes can not only depend on the present state but also on past state. These processes were described with differential equations with delayed argument. These equations are the special case of differential equations with the deviating argument (functional differential systems). In this work, a functional differential system with another type of nonlinearity comparatively with work [1] is observed. Odd or even number of equations, type of non-linearity of functions  $f_i(u)$  and type of arguments deviation have a great influence on asymptotic behavior of system's solution. Particular case of this system is a scalar equation:  $y^{(n)}(t) + \delta p(t)y^\alpha(\tau(t)) = 0 (\delta < 0)$ . This equation was an object of many investigations. As a result of these investigations, it was proven that asymptotic behavior of solutions of this equation depends on the sign of  $\delta$  and on type of nonlinearity:  $0 < \alpha < 1$  means sublinear type,  $\alpha = 1$  means linear type,  $\alpha > 1$  means super-linear type). In the case for  $\delta = 1$  and each state of  $\alpha$  it was proven that under the same conditions for even  $n$  solutions are oscillated and for odd  $n$  solutions are oscillated or monotonously tend to the zero with derivatives up to  $n-1$  order. In case of  $\delta = -1$  same condition guaranties for even  $n$  that solutions are oscillated or monotonously tend to the zero or infinity with derivatives up to  $n-1$  order and for odd  $n$  solutions are oscillated or monotonously tend to the infinity. The next step is generalization for systems with odd or even count of equations. In work [1] results were obtained for systems in sublinear case. In this work, the results for systems with odd or even count of equations in case when  $\delta = -1$  and with more general types of nonlinearity are generalized. An example that demonstrates optimality of obtained results was built.**

**Keywords:** differential equation, deviating argument, infinite time interval, asymptotic behavior.

**Вступ.** Дану роботу слід розглядати продовженням досліджень, проведених в роботі [1].

В роботі [1] проводилось дослідження асимптотичних властивостей розв'язків на нескінченному інтервалі одного класу систем з відхиленням аргументу:

$$\begin{cases} y'_i(t) = a_i(t) f_i(y_{i+1}(\tau_{i+1}(t))); \\ y'_n(t) = a_n(t) f_n(y_1(\tau_1(t))); \end{cases} i = \overline{1, n-1} (1),$$

де  $0 \leq a_i(t) \in C[t_0; \infty]$ ,  $f_i(u)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – неперервні, неспадні функції.

**Постановка задачі.** Розглянемо систему (1), яка досліджується при іншому типі нелінійностей функцій

$$f_i(u): f_n f_1 f_2 \dots f_{n-1}(u) = u (u \neq 0)$$

Суттєво різними є випадки системи з парною і непарною кількістю рівнянь.

Розглянемо системи з п'ятьма рівняннями і чотирма.

**Метод розв'язання та аналіз одержаних результатів.** Наведемо дві теореми, які встановлюють асимптотичні властивості розв'язків системи (1) при парній кількості та непарній кількості рівнянь.

### Теорема 1.

Нехай при  $n = 4$  виконуються умови:

$$1. g(t) = \min\{\tau_1, t\}, \tau_i(t) \leq t, i = 2, 3, 4;$$

$$2. \int_{t_0}^{\infty} a_1(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} a_2(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} a_3(t) dt = \infty;$$

$$3. \int_{t_0}^{\infty} a_4(p) f_4 \left( \int_{t_0}^{\tau_1(p)} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_0}^{\tau_2(z)} a_2(s) f_2 \left( \int_{t_0}^{\tau_3(s)} a_3(x) dx \right) ds \right) dz \right) dp = \infty;$$

$$4. \int_{t_0}^{\infty} a_1(x) f_1 \left( \int_x^{cx} a_2(z) f_2 \left( \int_z^{cz} a_3(p) f_3 \left( \int_p^{cp} a_4(s) dp \right) dz \right) dx \right) = \infty;$$

$$5. \int_{t_0}^{\infty} a_4(p) \left[ f_4 \left( \int_{t_0}^{g(p)} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_0}^{\tau_2(z)} a_2(x) f_2 \left( \int_{t_0}^{cx} a_3(s) ds \right) dx \right) dz \right) \right]^{1-\varepsilon} dp = \infty (0 < \varepsilon < 1).$$

Тоді кожний розв'язок системи (1) або сильно осцилює, або кожна компонента прямує або до нуля, або до нескінченності при  $t \rightarrow \infty$ .

### Доведення.

Якщо розв'язок системи (1)  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)\}$  сильно осцилює, то теорему доведено. Припустимо супротивне. Нехай система (1)



має розв'язок, який не є сильно осцилюючим, тобто хоча б одна компонента не осцилює. Тоді, усі  $y_i(t), i = \overline{1, n}$  не є осцилюючими, а отже, починаючи з деякого  $t$  зберігають свій знак.

Для визначеності  $y_1(t) > 0$ , тоді  $f_4(y_1(\tau_1(t))) > 0$  для  $\forall t_1 : t \geq t_1$ .

З четвертого рівняння системи маємо, що  $y_4'(t) > 0$  – монотонно зростає, тоді маємо два варіанта:  $y_4(t) > 0$  або  $y_4(t) < 0$ .

**Випадок 1.**  $y_4(t) > 0$ .

Тоді  $\exists t_2 : t_2 \geq t_1; t \geq t_2 f_3(y_4(t)) \geq f_3(y_4(t_1)) = C_1$

З третього рівняння системи (1) маємо:

$$y_3'(t) = a_3(t) f_3(y_4(t)) \geq a_3(t) f_3(y_4(t_1)) = C_1 a_3(t).$$

Проінтегруємо:

$$y_3(t) - y_3(t_2) \geq C_1 \int_{t_2}^t a_3(t) dt.$$

Враховуючи умову 2 цієї теореми, маємо  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_3(t)$ .

Аналогічно в результаті послідовних інтегрувань доведемо, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \infty$ .

З перших двох рівнянь маємо:

$$y_1(\tau_1(t)) > C \int_{t_2}^{\tau_1(t)} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_2}^t a_2(s) f_2 \left( \int_{t_2}^t a_2(x) dx \right) ds \right) dz.$$

Враховуючи це, з четвертого рівняння системи (1) в результаті послідовних інтегрувань, маємо:

$$y_4(t) - y_4(t_2) > C \int_{t_2}^{\infty} a_4(p) f_4 \left( \int_{t_2}^{\tau_1(t)} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_2}^t a_2(s) f_2 \left( \int_{t_2}^t a_2(x) dx \right) ds \right) dz \right) dp.$$

Враховуючи умови теореми:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_4(t) = \infty$ .

**Випадок 2.**  $y_4(t) < 0$ .

Тоді з третього рівняння системи (1) маємо, що  $y_3'(t) < 0$ , тобто  $y_3(t)$  монотонно спадаюча.

Тоді маємо два випадки: або  $y_3(t) < 0$ , або  $y_3(t) > 0$ .

**2.1** Нехай  $y_3(t) < 0$ .

Тоді:

$$f_2(y_3(t)) < f_2(y_3(t_4)) = -C_1, C_1 > 0, t \geq t_4.$$

Враховуючи друге та перше рівняння системи (1) після послідовних інтегрувань отримаємо:

$$y_1(t) - y_1(t_5) \leq -C \int_{t_5}^t a_1(t) dt.$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $y_4(t) < 0$ , що суперечить припущенню.

## 2.2 $y_3(t) > 0$ .

З другого рівняння системи (1) маємо:  $y_2'(t) > 0$ ,  $y_2(t)$  - монотонно зростає. Тоді або  $y_2(t) < 0$  або  $y_2(t) > 0$ .

### 2.2.a Нехай $y_2(t) < 0$ .

Тоді  $y_1(t)$  - монотонно спадна додатна функція. Доведемо, що в цьому випадку кожна компонента розв'язку  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)\}$  прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ .

З системи (1) випливає:

$y_1(t), y_3(t)$  - монотонно спадні додатні;

$y_2(t), y_4(t)$  - монотонно зростаючі від'ємні.

Покажемо, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$  Припустимо супротивне:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = -C (C \neq 0)$ .

Використаємо означення границі функції:

$$|y_2(t) + C| < \varepsilon, t \geq t_3.$$

Нехай  $\varepsilon = \frac{C}{2}$ , тоді:  $\frac{-C}{2} < y_2(t) + C < \frac{C}{2}$ ,

$$\frac{-3}{2}C < y_2(t) < -\frac{1}{2}C.$$

З першого рівняння системи (1) після інтегрування випливає:

$$y_1(t) - y_1(t_3) \geq -\frac{C}{2} \int_{t_3}^t a_1(t) dt.$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $y_1 \rightarrow -\infty$ ,  $y_1(t) < 0$ , що суперечить припущенню, а отже  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ .

Аналогічно можна показати, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_4(t) = 0$ .

Покажемо, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$ , де  $y_1(t)$  монотонно спадна додатна функція.

Від супротивного:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = m (m > 0)$ .

Знову використаємо означення границі:

$$|y_1(t) - m| < \varepsilon.$$

Покладемо  $\varepsilon = \frac{m}{2}$ . Тоді:

$$\frac{m}{2} < y_1(\tau_1(t)) < \frac{3}{2}m,$$

$$f_1\left(\frac{m}{2}\right) < f_4(y_1(\tau_1(t))) < f_1\left(\frac{3}{2}m\right),$$

$$f_1\left(\frac{m}{2}\right) = k.$$

Підставимо це у четверте рівняння системи (1):

$$y_4'(t) \geq a_4(t)k.$$

З першого, другого та третього рівнянь після послідовних інтегрувань отримаємо

$$y_1(t) - y_1(t_8) > \int_{t_8}^t a_1(x) f_1 \left( -c \int_t^{2t} a_2(z) f_2 \left( \int_z^{2z} a_3(t) f_3 \left( \int_p^{2p} a_4(s) ds \right) dp \right) dz \right) dx.$$

Оскільки  $y_1(t)$  – монотонна спадна додатна функція, то виникає суперечність. Отже,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$ .

### 2.2.6 $y_2(t) > 0$ .

З першого рівняння системи (1) випливає, що  $y_1(t)$  – монотонно зростаюча додатна функція. Враховуючи це, після послідовних інтегрувань третього, другого та першого рівнянь отримаємо

$$y_1(t) \geq y_4(2t) \int_{t_1}^t a_1(z) f_1 \left( \int_{t_1}^t a_2(x) f_3 \left( \int_x^{2x} a_3(s) ds \right) dx \right) dz.$$

Оскільки  $y_1(t)$  – монотонно зростає, то:

$$y_1(t) \geq y_1\left(\frac{t}{2}\right) \geq -y_4(t) \int_{t_1}^{\frac{t}{2}} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_1}^t a_2(x) f_3 \left( \int_x^{2x} a_3(s) ds \right) dx \right) dz.$$

Звідси, враховуючи монотонне зростання  $y_1(t)$ , а також те, що  $g(t) \leq \tau(t)$ ;  $g(t) \leq t$ ;  $g(t) = \min\{t; \tau(t)\}$ ,  $-y_4(g(t)) \geq -y_4(t)$  отримаємо:

$$y_1(\tau(t)) \geq -T f_1 f_2 f_3(y_4(t)) \int_{t_1}^{g(t)/c} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_1}^t a_2(x) f_3 \left( \int_x^{2x} a_3(s) ds \right) dx \right) dz.$$

Оскільки  $y_1(t) > 0$   $y_1(t)$  – зростає, то

$$f_4(y_1(\tau_1(t))) > K,$$

$$\frac{f_4(y_1(\tau(t)))}{K} \geq 1.$$

За властивістю дробового степеню, можемо записати

$$\frac{f_4(y_1(\tau(t)))}{K} \geq \left[ \frac{f_4(y_1(\tau(t)))}{K} \right]^{1-\varepsilon}.$$

Тоді з останнього рівняння системи (1) маємо:

$$y_4'(t) \geq a_5(t)(-T)C[y_4(t)]^{1-\varepsilon} \left[ f_4 \left( \int_{t_1}^{g(t)/c} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_1}^t a_2(x) f_3 \left( \int_x^{2x} a_3(s) ds \right) dx \right) dz \right) \right]^{1-\varepsilon},$$

$$C = \frac{K}{[K]^{1-\varepsilon}}.$$

Поділимо обидві частини нерівності на  $(-T)C[y_4(t)]^{1-\varepsilon} > 0$  та проінтегруємо:

$$\int_{t_1}^t \frac{y_4'(t)}{(-T)C[y_4(t)]^{1-\varepsilon}} dt \geq \int_{t_1}^t a_4(t) \left[ f_4 \left( \int_{t_1}^{g(t)/c} a_1(z) f_1 \left( \int_{t_1}^t a_2(x) f_3 \left( \int_x^{2x} a_3(s) ds \right) dx \right) dz \right) \right]^{1-\varepsilon} dt.$$

Маємо, що при  $t \rightarrow \infty$  зліва – скінченне число, а це суперечить умові теореми. Значить, цей випадок неможливий. Що і треба було довести ■.

**Теорема 2.** Нехай при  $n = 5$  виконуються умови:

1.  $g(t) = \min\{\tau_1, t\}, \tau_i(t) \leq t, i = 2, 3, 4, 5;$
2.  $\int_{t_0}^{\infty} a_1(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} a_2(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} a_3(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} a_4(t) dt = \infty,$
3.  $\int_{t_5}^{\infty} a_5(l) f_5 \left( \int_{t_5}^{\tau_1(t)} a_1(p) f_1 \left( \int_{t_5}^{\tau_2(z)} a_2(z) f_2 \left( \int_{t_5}^{\tau_3(t)} a_3(s) f_3 \left( \int_{t_4}^{\tau_4(t)} a_3(x) dx \right) ds \right) dz \right) dp \right) dl = \infty,$
4.  $\int_{t_1}^{\infty} a_5(p) \left[ f_5 \left( \int_{t_1}^{g(t)/c^3} a_1(p) f_1 \left( \int_p^{cp} a_2(x) f_2 \left( \int_x^{cx} a_3(l) f_3 \left( \int_l^{cl} a_4(s) ds \right) dl \right) dx \right) dp \right) \right]^{1-\varepsilon} dt = \infty,$   
 $(0 < \varepsilon < 1),$
5.  $\int_{t_1}^{\infty} a_5(t) \left[ f_5 \left( \int_{t_1}^{g(t)} a_1(x) f_1 \left( \int_{t_1}^{\tau_2(x)} a_2(u) f_2 \left( \int_{t_1}^{\tau_3(u)} a_3(z) f_3 \left( \int_z^{cz} a_4(l) dl \right) dz \right) du \right) dx \right) \right]^{1-\varepsilon} dt = \infty,$   
 $(0 < \varepsilon < 1).$

Тоді кожний розв'язок системи (1) або сильно осцилює, або всі його компоненти монотонно прямують до  $\infty$  при  $t \rightarrow \infty$

**Доведення.** У випадку, коли розв'язок системи (1)  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)\}$  сильно осцилює, теорему доведено.



Нехай розв'язок системи (1) не є сильно осцилювальним. Тоді з системи (1) та умов (2) не осцилюють усі інші компоненти цього розв'язку. В цьому випадку  $y_1(t) > 0$  або  $y_1(t) < 0$  при  $t \geq t_1$ .

Для визначеності нехай  $y_1(t) > 0$  при  $t \geq t_1$ . Тоді з умови  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \infty$  та останнього рівняння системи (1) випливає, що  $y_5'(t) > 0$ , а тому  $y_5'(t)$  – монотонно зростаюча функція.

Тоді маємо два випадки: або  $y_5(t) > 0$  або  $y_5(t) < 0$  при  $t \geq t_3 \geq t_2$

I. Розглянемо випадок, коли  $y_5(t) > 0$ . Тоді так само, як в теоремі 1 доведемо, що всі  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = \infty$

II. Розглянемо випадок, коли  $y_5(t) < 0$ . З четвертого рівняння випливає, що  $y_4'(t) > 0$ . Отже,  $y_4(t)$  – монотонно спадна функція. Тому  $y_4(t) < 0$  або  $y_4(t) > 0$  при  $t \geq t_4 \geq t_3$

1. Нехай  $y_4(t) < 0$ .

Тоді за допомогою тих же міркувань, що в теоремі 1 дійдемо висновку, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = -\infty$  а це суперечить припущенню  $y_1(t) > 0$  Тобто цей випадок неможливий.

2. Нехай  $y_4(t) > 0$ .

З третього рівняння системи випливає, що  $y_3'(t) > 0$ . Тобто  $y_3(t)$  – монотонно зростаюча функція.

Можливі два випадки: або  $y_3(t) < 0$ , або  $y_3(t) > 0$  при  $t \geq t_8 \geq t_7$

1) Розглянемо випадок  $y_3(t) < 0$

З другого рівняння випливає, що  $y_2(t)$  – монотонно спадна функція. Можливі два випадки: або  $y_2(t) < 0$ , або  $y_2(t) > 0$ .

a) Нехай  $y_2(t) < 0$

Тоді за допомогою міркувань, наведених в теоремі 1 з умови (3) випливає, що  $y_1(t) < 0$ , що суперечить припущенню, отже цей випадок неможливий.

b) Нехай  $y_2(t) > 0$

Проінтегруємо четверте рівняння. Оскільки  $y_4(t) > 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$  отримуємо

$$y_4(t_1) \geq - \int_{t_1}^{\infty} a_4(x) f_4(y_5(\tau_5(x))) dx.$$

Оскільки ця нерівність виконується при будь-яких  $t \geq t_1$  і оскільки  $y_5(t)$  – монотонно зростає, то через те, що  $y_4(\tau_4(t)) \geq y_4(t)$ , виконується наступне

$$y_4(\tau_4(t)) \geq f_5(y_5(ct)) \int_t^{ct} a_4(x) dx (c > 1).$$

Оскільки функція  $f_3(u)$  – неспадна, то

$$f_3\left(y_4(\tau_4(t))\right) \geq f_3\left(-f_4\left(y_5(ct) \int_t^{ct} a_4(x) dx\right)\right).$$

Продовжуючи аналогічним чином, отримуємо оцінку для  $y_1(t)$

$$y_1(t) \geq (-K_3) f_2\left(f_3\left(f_4\left(y_5(c^3t)\right)\right)\right) \times \\ \times \int_{t_1}^t a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s) ds\right) dl\right) dx\right) dp.$$

$y_1(t)$  – монотонно зростає, тому

$$y_1(t) \geq y_1(c^{-3}t) \geq (-K_3) f_1\left(f_2\left(f_3\left(f_4\left(y_5(t)\right)\right)\right)\right) \times \\ \times \int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s) ds\right) dl\right) dx\right) dp.$$

Оскільки

$$g(t) \leq t; g(t) = \min\{t; \tau(t)\},$$

то

$$f_5\left(y_1(\tau_1(t))\right) \geq (-K_4) f_5\left(f_1\left(f_2\left(f_3\left(f_4\left(y_5(t)\right)\right)\right)\right)\right) \times \\ \times \int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s) ds\right) dl\right) dx\right) dp.$$

Оскільки  $y_1(t) > 0$ ,  $y_1(t)$  – зростає, то

$$f_5\left(y_1(\tau_1(t))\right) > K, \\ \frac{f_5\left(y_1(\tau(t))\right)}{K} \geq 1.$$

За властивістю дробового степеню, можемо записати

$$\frac{f_5\left(y_1(\tau(t))\right)}{K} \geq \left[\frac{f_5\left(y_1(\tau(t))\right)}{K}\right]^{1-\varepsilon}.$$

Тоді з останнього рівняння системи випливає, що

$$y_5'(t) \geq a_5(t) (-K_4) C [y_5(t)]^{1-\varepsilon} \times \\ \times \left[ f_5\left(\int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s) ds\right) dl\right) dx\right) dp\right) \right]^{1-\varepsilon}.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на  $(-K_4)C [y_5(t)]^{1-\varepsilon} > 0$  і проінтегруємо. Отримаємо:

$$-K_5 \frac{[y_5(t)]^\varepsilon}{\varepsilon} + K_5 \frac{[y_5(t_1)]^\varepsilon}{\varepsilon} \geq \int_{t_1}^t a_5(t) \left[ f_5 \left( \int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1 \left( \int_p^{cp} a_2(x) f_2 \left( \int_x^{cx} a_3(l) f_3 \left( \int_l^{cl} a_4(s) ds \right) dl \right) dx \right) dp \right) \right]^{1-\varepsilon} dt.$$

Оскільки  $y_5(t)$  – монотонно зростаюча від’ємна функція, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_5(t) = -M$ .

Маємо, що при  $t \rightarrow \infty$  зліва – скінченне число, а це суперечить умові теореми. Отже, цей випадок неможливий.

2) Розглянемо випадок  $y_3(t) > 0$

Оскільки  $y_4(t) > 0$  то  $y_3(t)$  – додатня монотоннозростаюча функція. Тоді  $y_3(t) \geq y_3(t_9) = C, (C > 0)$  при  $t \geq t_9 \geq t_8$ .

З умови  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_3(t) = \infty$  випливає, що існує таке  $t_{10} \geq t_9$ , що при  $t \geq t_{10}$  виконується  $\tau_3(t) \geq t_9$  і  $y_3(\tau_3(t)) \geq C$

Тоді з другого рівняння системи (1) після інтегрування отримуємо:

$$y_2(t) - y_2(t_{10}) \geq f_2(C) \int_{t_{10}}^t a_2(s) ds$$

Звідси, враховуючи умови теореми при  $t \rightarrow \infty$  маємо, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \infty$ .

Тобто  $y_2(t) > 0$ .

Аналізуючи рівняння системи (1), застосовуючи міркування попереднього випадку і те, що  $y_1(t)$  – монотонно зростає, отримаємо оцінку для  $y_1(t)$ :

$$y_1(t) \geq y_1(c^{-3}t) \geq (-K_3) f_1 \left( f_2 \left( f_3 \left( f_4 \left( y_5(t) \right) \right) \right) \right) \int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1 \left( \int_p^{cp} a_2(x) f_2 \left( \int_x^{cx} a_3(l) f_3 \left( \int_l^{cl} a_4(s) ds \right) dl \right) dx \right) dp.$$

Оскільки

$g(t) \leq t; g(t) = \min\{t; \tau(t)\}$ , то

$$f_5 \left( y_1(\tau_1(t)) \right) \geq (-K_4) f_5 \left( f_2 \left( f_3 \left( f_4 \left( y_5(t) \right) \right) \right) \int_{t_1}^t a_1(x) f_1 \left( \int_{t_1}^{\tau_2(x)} a_2(u) f_2 \left( \int_{t_1}^{\tau_2(u)} a_3(z) f_3 \left( \int_z^{cz} a_4(l) ds \right) dz \right) du \right) dx \right).$$

Оскільки  $y_1(t) > 0$ ,  $y_1(t)$  – зростає, то  $f_5 \left( y_1(\tau_1(t)) \right) > K, \frac{f_5 \left( y_1(\tau_1(t)) \right)}{K} \geq 1$ .

Використовуючи міркування, аналогічні випадку b, отримаємо

$$y_5'(t) \geq a_5(t)(-K_4)C[y_5(t)]^{1-\varepsilon} \times \\ \times \left[ f_5 \left( \int_{t_1}^{g(t)/c} a_1(x) f_1 \left( \int_{t_1}^{\tau_2(x)} a_2(u) f_2 \left( \int_{t_1}^{\tau_3(u)} a_3(z) f_3 \left( \int_z^{cz} a_4(l) dl \right) dz \right) du \right) dx \right) \right]^{1-\varepsilon}.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на  $(-K_4)C[y_5(t)]^{1-\varepsilon} > 0$  і проінтегруємо. Отримаємо:

$$-K_5 \frac{[y_5(t)]^\varepsilon}{\varepsilon} + K_5 \frac{[y_5(t_1)]^\varepsilon}{\varepsilon} \geq \\ \geq \int_{t_1}^t a_5(t) \left[ f_5 \left( \int_{t_1}^{g(t)} a_1(x) f_1 \left( \int_{t_1}^{\tau_2(x)} a_2(u) f_2 \left( \int_{t_1}^{\tau_3(u)} a_3(z) f_3 \left( \int_z^{cz} a_4(l) dl \right) dz \right) du \right) dx \right) \right]^{1-\varepsilon} dt,$$

Оскільки  $y_5(t)$  – монотонно зростаюча від’ємна функція, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_5(t) = -M$ .

Маємо, що при  $t \rightarrow \infty$  зліва – скінченне число, а це суперечить умові теореми. Отже, цей випадок неможливий.

Побудуємо приклад, який свідчить про оптимальність умови (5), навіть при  $\tau(t) \equiv t$ . Насправді, для системи

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) \\ y_4'(t) = \frac{105}{256t^4} y_1(t) \end{cases}$$

умова (5) виконується при  $\varepsilon = 0$ , але не виконується при жодних  $0 < \varepsilon < 1$ . Система має розв’язок:

$$\left\{ t^{\frac{5}{4}}, \frac{5}{4} t^{\frac{1}{4}}, \frac{5}{16} t^{-\frac{3}{4}}, -\frac{15}{64} t^{-\frac{7}{4}} \right\},$$

не всі компоненти якого прямують до нескінченності або до нуля.

**Висновки** Був розглянутий випадок, який є узагальненням лінійного випадку, коли нелінійність в рівняннях має вигляд степеневих функцій. Були отримані нові теоретичні результати, а саме аналітичними методами була досліджена асимптотична поведінка розв’язків системи.

#### Бібліографічні посилання

1. **Варех, Н.В.** Дослідження асимптотичної поведінки розв’язків диференціально-функціональних систем. [Текст]/ Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, Г.Ф. Мусаєва, О.А. Падалка // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. - 2017. – С. 34-35.

Надійшла до редколегії 19.09.2018.

**В.Л. Волошко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ**

**Розглянуто задачу знаходження оптимальної функції граничних умов неоднорідного бігармонічного рівняння. Застосовується один з варіантів градієнтного методу, де на кожному кроці лінійна задача розв'язується методом потенціалів. Наведені фізичні приклади її чисельної реалізації.**

**Ключові слова:** бігармонічне рівняння, метод потенціалів, градієнтний метод, оптимальне керування.

**Рассмотрена задача нахождения оптимальной функции граничных условий неоднородного бигармонического уравнения. Применяется один из вариантов градиентного метода, где на каждом шаге задача решается методом потенциалов. Приведены физические примеры ее численной реализации.**

**Ключевые слова:** бигармоническое уравнение, метод потенциалов, градиентный метод, оптимальное управление.

**Mathematical model construction of complicate physical phenomenon often leads to the setting and solving problems of parameters optimal control in differential equations in partial derivatives. Chosen equation with boundary and initial conditions is usually mathematical model basis of the object, which is under analysis. Optimal control of right-hand side function in non-linear problem for inhomogeneous biharmonic has been investigated. With the help of various gradient methods the problems of parameters control in such equations are solved successfully. Herewith linear problem is solved with the potential method on every step. In this work biharmonic potentials with logarithmic singularity are under consideration. That is why parameters optimization in these problems are conducted together with elimination of their incorrectness. It should be noted that system optimal control problems, described with biharmonic equations in irregular shape region, are studied poorly. Therefore the object of investigation is one of boundary conditions for inhomogeneous biharmonic equation. The circumstance which complicated the problem was irregularity of function domain. Clearly that this problem can be solved with computational mathematics methods. Without precise solution of linear problem, it is impossible to use gradient method, build converging iterative process, and obtain precise solution of optimization problem. Algorithm for linear boundary value problem solution with boundary integral equations overcomes this problem successfully. Physical examples of numerical implementation have been presented, analysis of obtained solutions have been conducted. Their accuracy, algorithm simplicity and time spent evidence about this approach promising for practical results obtaining in plate theory and mathematical physics problems successful numerical solving.**

**Keywords:** biharmonic equation, potential method, gradient method, optimal control.

**Вступ.** Точність розв'язку лінійної крайової задачі є високою [4]. Отже, використавши його як базовий, можна отримати достатньо ефективний розв'язок відповідної нелінійної задачі. В роботі розглядається задача відновлення оптимальних крайових умов бігармонічного неоднорідного рівняння. Раніше, в [2] функціонал якості досліджений на опуклість та проведено обґрунтування існування чисельного розв'язку. В основі способу розв'язування лежить один із варіантів градієнтного методу. Викладено алгоритм розв'язку поставленої задачі [1,3].

### Постановка оптимізаційної задачі

$$\Delta w(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$w(x, y) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де крива  $\Gamma$  задана параметрично  $\begin{cases} \xi = \xi(s) \\ \eta = \eta(s) \end{cases}$ ,  $0 \leq s \leq S$  – природний параметр

(довжина кривої),  $r$  – відстань між точками:  $r(x, y; \xi, \eta) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ,  $\nu = \nu(s) = \nu(\xi, \eta)$  – внутрішня нормаль, що проведена до кривої  $\Gamma$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  – область, обмежена гладким контуром  $\Gamma$ ,  $w = w(x, y)$  – невідома функція,  $f(x, y)$  – функція правої частини рівняння (1) задана в області  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  – функції крайових умов (2) задані на контурі  $\Gamma$ ,  $n$  – внутрішня нормаль в точці  $(x, y) \in \Gamma$ . Як відомо [6], фундаментальний розв'язок однорідного бігармонічного рівняння відповідного (1) є

$$K^1 = K^1(x, y; \xi, \eta) = r^2(x, y; \xi, \eta) \ln r(x, y; \xi, \eta).$$

Позначимо  $K^2 = K^2(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \nu} K^1(x, y; \xi, \eta)$ , де точки  $(\xi, \eta) \in \Gamma$ ,

$(x, y) \in \Omega$ . Тоді отриманий раніше [5,6] розв'язок задачі (1) – (2) має вид

$$\begin{aligned} w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) = & \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \\ & + \int_{\Gamma} \left( (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \times \right. \\ & \left. \times \left( \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \\ \psi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \frac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \end{pmatrix} d\Gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) \right) d\Gamma(\xi, \eta), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

і залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов.

Припустивши, що функції  $f(x, y)$  і  $\varphi(x, y)$  задані, поставимо задачу знаходження  $\psi(x, y)$  і  $w(x, y)$ , які надають мінімум функціоналу

$$\begin{aligned}
 I(w(\cdot, \cdot), \psi(\cdot, \cdot)) &= \iint_{\Omega} (w(x, y) - w_{fixed}(x, y))^2 dx dy = \\
 &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) + \int_{\Gamma} \left( (K^1(x, y; \xi, \eta), K^2(x, y; \xi, \eta)) \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \int_{\Gamma} \tilde{K}^{-1}(\xi, \eta; \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - w_1(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \\ \psi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \frac{dw_1}{dn}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \end{pmatrix} d\Gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) d\Gamma(\xi, \eta) - w_{fixed} \right]^2 dx dy,
 \end{aligned} \quad (4)$$

де  $w_{fixed}(x, y)$  – деяка задана функція. Коротко задача мінімізації записується так

$$I(w(\cdot, \cdot), \psi(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{w, \psi}. \quad (5)$$

Розглянемо частинний випадок, коли задача (1) – (2), (5) має конкретний фізичний зміст, а саме визначення згину тонкої пластини форми  $\Omega$ , обмеженої контуром  $\Gamma$ . Отже,

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad \text{де}$$

$q(x, y)$  та  $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$  – поперекове навантаження та циліндрична

жорсткість пластини,  $h$  – її товщина пластини,  $\sigma = 0.3$  – коефіцієнт Пуассона її матеріалу,  $E = 21.6 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$  – модуль Юнга.

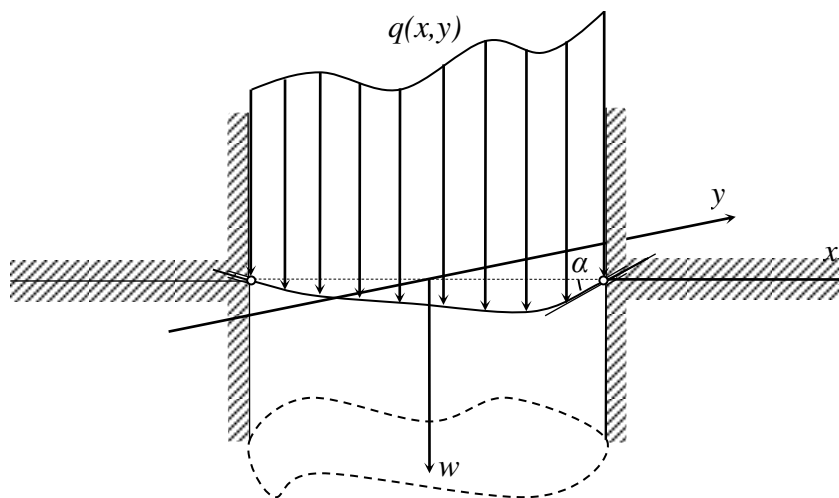


Рис. 1. Схематичне зображення способу кріплення пластини



Нехай маємо щільний півпростір з нескінченний наскрізним отвором форми  $\Omega$ , в якому закріплено пластину такої ж форми. Задамо значення однієї з крайових умов:  $w = \varphi(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \Gamma$ . Фізично це означає, що граничні точки пластини не зміщуються, тобто вона закріплена по контуру, а функція  $\psi(x, y)$  визначає тангенс кута нахилу  $\alpha(x, y)$  пластини в її граничних точках (кріплення пластини) в напрямку нормалі (рис 1).

Тоді задача полягає у визначенні таких кутів кріплення  $\psi(x, y) = \operatorname{tg} \alpha(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma$  і згину  $w(x, y)$ , щоб сума відхилень всіх точок її серединної площини від заданного згину  $w_{fixed}(x, y)$  була мінімальною.

Для знаходження розв'язку задачі (1) – (2) було обрано один з варіантів градієнтного методу. Як відомо [1], якщо  $I'_\psi(w, \psi) \neq 0$ , то напрямком найшвидшого спадання функціоналу (4) співпадає з напрямком антиградієнта  $(-I'_\psi(w, \psi))$ . Саме ця властивість лежить в основі градієнтних методів, які мають такі переваги [3]: достатньо прості в реалізації; вимоги до цільової функції не є дуже жорсткими – достатньо існування похідної функціоналу. Застосування цих методів доцільне у випадку, коли початкове наближення знаходиться далеко від точки мінімуму функціоналу, тоді кроки вздовж антиградієнта дозволяють зменшити значення функціоналу [3].

Нехай  $\psi^0(x, y)$  – обране початкове наближення. Тоді будемо послідовність  $\{\psi^k(x, y)\}$  за правилом

$$\psi^{k+1}(x, y) = \psi^k(x, y) - \alpha_k \frac{\partial I(\psi(x, y))}{\partial \psi(x, y)}, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Таким чином члени послідовності  $\{\psi^k(x, y)\}$  є розв'язками відповідних лінійних крайових задач (1) – (2) на кожному кроці ітераційного процесу.

Різні способи вибору величини кроку  $\alpha_k$  визначають різні варіанти градієнтних методів. Будемо використовувати метод з дробленням кроку, оскільки метод найшвидшого спуску буде занадто трудомістким для даної задачі, а метод з апріорним завданням величини  $\alpha_k$  не гарантує виконання умови монотонності, збігається повільно і, взагалі, не є достатньо ефективним [3]. Застосування градієнтного методу, перехід від неперервної задачі до дискретної і та алгоритм її розв'язання, знаходження похідної Фреше від функціоналу якості досить детально розглянуті в роботах [2,5]. Там же наведені чисельні результати модельних задач, а також теоретична і практична оцінки похибок. Далі розглянемо задачі фізичного змісту – проектування оптимального кріплення пластин.

Приклад 1. Квадратна пластина у випадку гідростатичного навантаження. Нехай сторона квадрату  $a=2$  м, гідростатичне навантаження

$$q(x, y) = \left( \frac{q_0}{2} + \frac{q_0 x}{2a} \right), \quad x \in \left( -\frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right) \quad \text{з параметром } q_0 = 17500 \text{ кН/м.кв.} \quad (\text{рис.2}).$$

Оберемо  $w_{fixed}(x, y) = A \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{a}$ , де  $A = \frac{q_0}{16D} \left( \frac{a}{2\pi} \right)^4$ ,  $D$  – циліндрична жорсткість,  $w(x, y)$  – функція зміщення точок серединної площини пластини,  $q(x, y)$  – поперечне навантаження на пластину,  $h=0,05$  м – товщина пластини,  $\sigma = 0.3$  – коефіцієнт Пуассона її матеріалу,  $E = 21.6 \cdot 10^{10}$  н/м<sup>2</sup> – модуль Юнга,  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  – функції крайових умов, які визначають спосіб кріплення пластини. Тепер за допомогою викладеного алгоритму визначаємо оптимальні кути кріплення пластини по контуру, щоб сума квадратів відхилень точок пластини від її серединної площини була мінімальною.

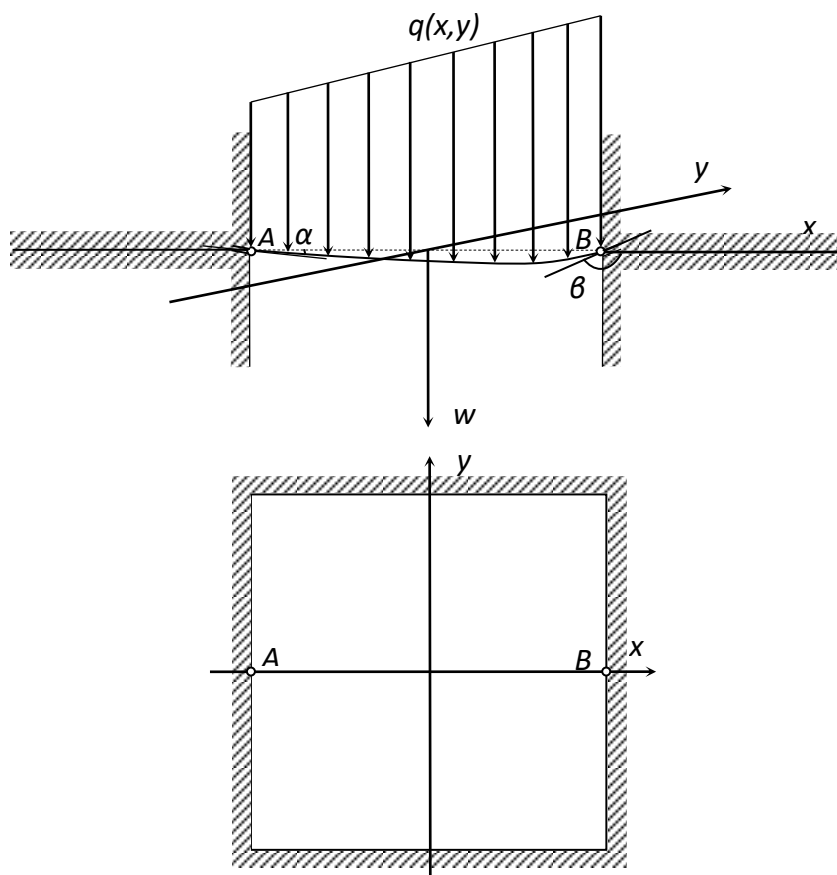


Рис. 2. Оптимальні кути кріплення квадратної пластини

Нехай початкове наближення  $\psi^0(x, y) \equiv tg \alpha(x, y) = 0.5$  для всіх  $(x, y) \in \Gamma$ . При цьому початкове наближення значення функціоналу  $I(\psi^0(x, y)) = 0.108$ . Для збіжності процесу достатньо сімнадцяти ітерацій. Оптимальне значення тангенсів кутів кріплення пластини в точках  $A$  і  $B$  складають  $tg \alpha(A) = -0.18$ ,  $tg \alpha(B) = -0.22$ , при цьому сума прогинів серединних точок пластини зменшується до  $I(\psi^{17}(x, y)) = 0.0005$  (рис. 2).

Приклад 2. Пластина складної форми з рівномірним навантаженням.

Нехай пластина має форму овалу Касіні з параметрами  $a=1\text{м}$ ,  $c=0,8\text{м}$  рівномірне навантаження  $q=3\text{кН/м.кв.}$ (рис.3). Інші параметри беремо з попереднього прикладу. Функцію  $w_{fixed}(x, y)$  задамо, як розв’язок прямої задачі (1) – (2) при  $\psi(x, y) = 0$ . Початкове наближення  $\psi^0(x, y) \equiv \text{tg}\alpha(x, y) = 2$  для  $(x, y) \in \Gamma$ , відповідне значення функціоналу  $I(w^0, \psi^0(x, y)) = 0.503$ . Для збіжності процесу достатньо двадцяти шести ітерацій. На рис.3 знаками «+» і «-» в штрихованому сегменті позначені ділянки додатних і від’ємних значень відповідних тангенсів кутів нахилу кріплення пластини в граничних точках, тобто спостерігається чергування знаків при переході через точки позначені на рисунку символами « $\overset{\frown}$ » і « $\underset{\smile}$ ». Крім того, має місце симетрія отриманих розрахунків

$$\begin{aligned} \text{tg}\alpha(A) &= -0.019, \text{tg}\alpha(A') = -0.018, \text{tg}\alpha(B) = 0.055, \text{tg}\alpha(B') = 0.059, \\ \text{tg}\alpha(C) &= 0.028, \text{tg}\alpha(C') = 0.029, \text{tg}\alpha(D) = -0.011, \text{tg}\alpha(D') = -0.011, \\ \text{tg}\alpha(E) &= 0.077, \text{tg}\alpha(E') = 0.073. \end{aligned}$$

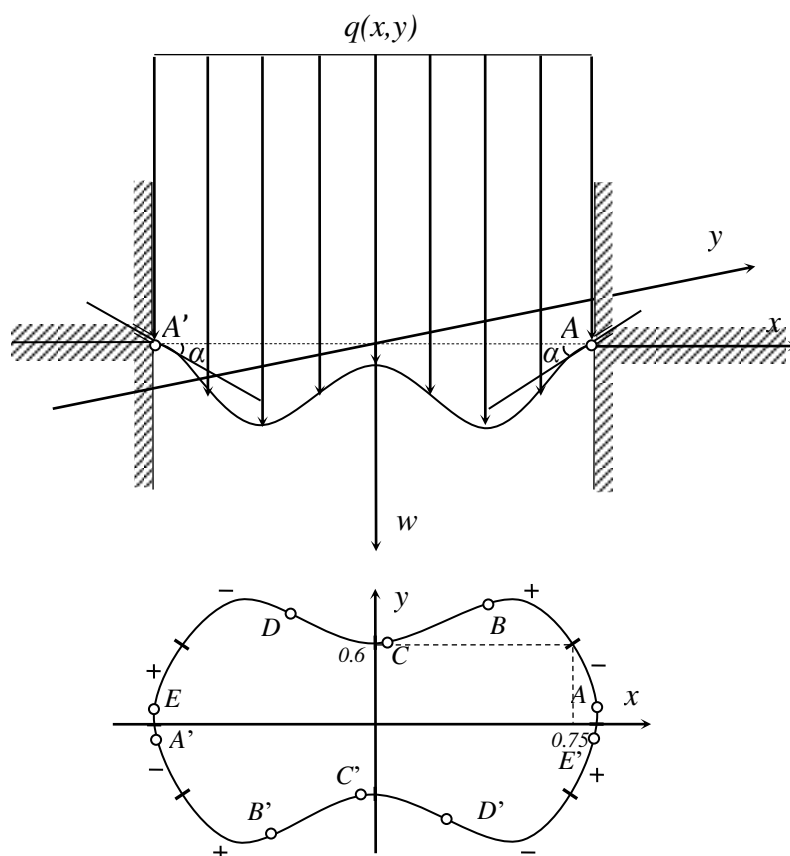


Рис. 3. Оптимальні кути кріплення пластини форми овал Касіні

Значення тангенсів кутів кріплення близькі до нуля, при цьому сума прогинів точок пластини зменшується до  $I(w^{26}, \psi^{26}(x; y)) = 9.44\text{E} - 5$ (рис. 3).

**Висновок.** Сформульована математична постановка задачі оптимального граничного керування для неоднорідного бігармонічного рівняння. Вказані основні етапи її розв'язання, а саме обґрунтування достовірності і єдності розв'язку, аналіз функціоналу якості, знаходження похідної Фреше, застосування градієнтного методу та розв'язування модельних задач, а також зроблені відповідні посилання.

Важливо, що в цій статті метод проілюстрований конкретним фізичним прикладом для пластин складної форми. Розрахунки параметрів кріплення в різних граничних точках таких пластини відповідають уявленням про фізичну картину процесу, а симетрія отриманих результатів для пластин відповідної форми у випадку рівномірного навантаження є додатковим підтвердженням вірогідності наведених розрахунків.

#### Бібліографічні посилання

1. **Васильев, Ф. П.**, Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 550с.
2. **Волошко, В.Л.** Оптимальне граничне керування параметрами неоднорідного бігармонічного рівняння. Обґрунтування методу розв'язування задачі [Текст] : зб. наук.пр. / В.Л.Волошко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д., 2017. – С. 25 – 32.
3. **Кісельова, О. М.** Чисельні методи оптимізації [Текст] / О. М. Кісельова, А. Є. Шевельова. – Д.: Видавництво ДНУ, 2008. – 212с.
4. **Кісельова, О. М.** Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми [Текст] / О. М. Кісельова, В. Д. Ламзюк, Л. В. Волошко // «Вісник ДНУ», серія «Моделювання». – 2011. – Вип. 3. – №8. – С. 20 – 28.
5. **Киселева, Е. М.** Решение задачи оптимального граничного управления для неоднорідного бигармонического уравнения [Текст] / Е. М. Киселева, Л. В. Волошко // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №4. С. 58–68.
6. **Лебедев, Н. Н.** Сборник задач по математической физике [Текст] / Н. Н.Лебедев, И. П.Скальская, Я. С.Уфлянд. – М.: Гос. изд-тво тех.-теор. лит., 1955. – 421с.

*Надійшла до редколегії 02.10.2018.*

**Л.Л. Гарт**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПРО ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛА**

Досліджено проекційно-ітераційні процеси, засновані на методі умовного градієнта, для розв'язання задачі мінімізації функціонала в дійсному сепарабельному гільбертовому просторі. Доведено збіжність за функціоналом, а в разі сильно опуклого функціонала – й за аргументом, декількох обчислювальних схем проекційно-ітераційного методу при різних способах вибору крокового множника. Отримано оцінки похибки та швидкості збіжності.

**Ключові слова:** функціонал, множина, простір, задача мінімізації, послідовність, метод умовного градієнта, проекційно-ітераційний метод, збіжність, оцінка, похибка.

Исследованы проекционно-итерационные процессы, основанные на методе условного градиента, для решения задачи минимизации функционала в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Доказана сходимость по функционалу, а в случае сильно выпуклого функционала – и по аргументу, нескольких вычислительных схем проекционно-итерационного метода при различных способах выбора шагового множителя. Получены оценки погрешности и скорости сходимости.

**Ключевые слова:** функционал, множество, пространство, задача минимизации, последовательность, метод условного градиента, проекционно-итерационный метод, сходимость, оценка, погрешность.

We study projection-iterative processes based on the conditional gradient method to solve the problem of minimizing a functional in a real separable Hilbert space.

To solve extremal problems, methods of approximate (projection) type are often used, which make it possible to replace the initial problem by a sequence of auxiliary approximating extremal problems. The work of many authors is devoted to the problems of approximating various classes of extremal problems. Investigations of projection and projection-iteration methods for solving extremal problems with constraints in Hilbert and reflexive Banach spaces were carried out, in particular, in the works of S.D. Balashova, in which the general conditions for approximation and convergence of sequences of exact and approximate solutions of approximating extremal problems considered both in subspaces of the original space and in certain spaces isomorphic to them were proposed.

The projection-iterative approach to the approximate solution of an extremal problem is based on the possibility of applying iterative methods to the solution of approximating problems. Moreover, for each of the "approximate" extremal problems, only a few approximations are obtained with the help of a certain iteration method and the last of them as the initial approximation for the next "approximate" problem is used.

This paper, in continuation of the author's past work to solve the problem of minimizing a functional on a convex set of Hilbert space, is devoted to obtaining theoretical estimates of the rate of convergence of the projection-iteration method based on the conditional gradient method (for different ways of specifying a step multiplier) of minimization of approx

imating functionals in certain spaces isomorphic to subspaces of the original space. We prove theorems on the convergence of a projection-iteration method and obtain estimates of error and convergence degree.

**Keywords:** functional, set, space, minimization problem, sequence, conditional gradient method, projection-iteration method, convergence, estimate, error.

**Вступ.** Ітераційні і проєкційні (апроксимаційні) методи складають два найважливіших класи чисельних процедур, які застосовуються для побудови розв'язків різних задач, що виникають в теорії керування і оптимізації [1]. Правильно побудована апроксимація екстремальної задачі задачами більш простої природи дозволяє отримати змістовні результати якісного і кількісного характеру про досліджуваний процес. Основи теорії і методів апроксимації та стійкості екстремальних задач закладені в працях П.-Ж. Лорана, Ю. М. Єрмольєва, А. М. Тихонова, В. В. Васина, М. М. Потапова, А. Дончева, В. В. Петрішина, Б. Ш. Мордуховича та багатьох інших авторів. Перші результати із загальних умов збіжності за функціоналом, в тому числі для скінченно-різницевих апроксимацій екстремальних задач були отримані в роботах Б. М. Будака, Б. М. Берковича, Є. М. Солов'явої [2]. Для збіжності апроксимаційних методів за аргументом використовувався метод регуляризації А. М. Тихонова. Основам теорії ітераційних методів і алгоритмів оптимізації присвячені відомі роботи Ж. Сеа, Е. Полака, Б. М. Пшеничного, Ю. М. Даниліна, Ф. П. Васильєва та багатьох інших вчених. Складність та ефективність методів оптимізації вивчалась в роботах А. С. Немировського, Д. Б. Юдина, М. М. Кузюрина, С. А. Фоміна.

Проекційні та проєкційно-ітераційні методи розв'язання екстремальних задач в гільбертових і рефлексивних банахових просторах, засновані на базовій ідеї С. Д. Балашової, досліджувалися в роботах [3-10]. Стосовно задачі

$$F(u) \rightarrow \inf, \quad u \in \Omega, \quad (1)$$

мінімізації обмеженого знизу функціоналу  $F(u)$  на множині  $\Omega$  дійсного сепарабельного гільбертова простору  $H$  ця ідея полягає в тому, що задача (1) замінюється деякою послідовністю апроксимуючих її екстремальних задач

$$F_n(u_n) \rightarrow \inf, \quad u_n \in \Omega_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

заданих на множинах  $\Omega_n = \Omega \cap H_n$  із підпросторів  $H_n$  вихідного простору ( $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots \subset H$ ). Для кожної з «наближених» екстремальних задач (2) знаходиться за допомогою деякого ітераційного методу лише кілька наближень  $u_n^{(k)} \in \Omega_n$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_n$ , останнє з яких обирається за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної,  $(n+1)$ -ої задачі. Послідовність наближень  $\{u_n^{(k_n)}\}$  оголошується мінімізуючою послідовністю для вихідного функціоналу  $F(u)$  на множині  $\Omega \subset H$ , а також послідовністю

наближень до точки  $u^*$  мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$  (якщо така точка існує). Отримано загальні умови апроксимації і збіжності за функціоналом (а у випадку сильно опуклого функціоналу  $F(u)$  на  $\Omega$  – й за аргументом) проєкційного і деяких проєкційно-ітераційних методів розв'язання задачі (1), в тому числі безумовної мінімізації ( $\Omega = H$ ) при проектуванні як у підпростори вихідного простору, так і в деякі простори, ізоморфні ним. Побудовано проєкційні варіанти градієнтних методів (проєкції градієнту [6], умовного градієнту [3], спряжених градієнтів [7]), методів релаксації та Ньютона [4] в дійсних сепарабельних гільбертових просторах. У той же час недослідженими залишились питання стійкості та швидкості збіжності проєкційно-ітераційних методів розв'язання задачі (1), можливості побудування регуляризуючих проєкційно-ітераційних методів розв'язання некоректних екстремальних задач у функціональних просторах.

**Постановка задачі.** Нехай на деякій множині  $\Omega$  дійсного сепарабельного гільбертова простору  $H$  заданий обмежений знизу функціонал  $F(u)$ :

$$\inf_{u \in \Omega} F(u) = F^* > -\infty. \quad (3)$$

Розглянемо задачу (1) мінімізації  $F(u)$  на  $\Omega$ , розуміючи під цим такі питання [11]: 1) знайти  $F^* = \inf_{u \in \Omega} F(u)$ ; 2) вказати мінімізуючу послідовність  $\{u^{(k)}\} \subset \Omega$ , для якої  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(u^{(k)}) = F^*$ , або ж, якщо це можливо, знайти точку  $u^* \in \Omega$  з властивістю  $F(u^*) = F^*$  (точку мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$ ).

Для розв'язання задачі (1), як зазначалось вище, розроблено і досліджено на збіжність значну кількість проєкційно-ітераційних методів, які дозволяють за певних умов будувати на  $\Omega$  послідовності  $\{u_n^{(k_n)}\}$ , що є мінімізуючими для  $F(u)$  або збігаються до точки мінімуму  $u^* \in \Omega$ . Частина з цих методів придатна для пошуку мінімуму функціонала на всьому просторі  $H$ , частина – на обмежених множинах  $\Omega$ , а деякі методи нескладно пристосувати до пошуку мінімуму як при  $\Omega = H$ , так і при  $\Omega \neq H$ , причому множина  $\Omega$  може бути обмежена або необмежена.

В даній роботі досліджуються декілька обчислювальних схем проєкційно-ітераційного методу розв'язання задачі (1), оснований на методі умовного градієнту, при різних способах вибору крокового множника. За певних припущень доводиться збіжність відповідних послідовностей наближень за функціоналом і за аргументом та одержуються оцінки швидкості збіжності.

**Метод розв'язання.** *Проєкційно-ітераційна реалізація методу умовного градієнту в гільбертовому просторі.* Для наближеного розв'язання задачі (1) апроксимуємо функціонал  $F(u)$  послідовністю більш простих «наближених» функціоналів  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , заданих відповідно на деяких множинах  $\tilde{\Omega}_n$  дійсних гільбертових просторів  $\tilde{H}_n$ . Будемо вважати, що простори  $\tilde{H}_n$  ізоморфні підпросторам  $H_n$  вихідного простору  $H$  і  $\Phi_n$  – лінійні неперервно

оборотні оператори, які здійснюють взаємно однозначне відображення  $H_n$  на  $\tilde{H}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причому  $\Phi_n$  рівномірно по  $n$  обмежені, тобто

$$\|\Phi_n\| \leq C', \quad n = 1, 2, \dots; \quad (4)$$

$\Phi_n^{-1}$  – оператори оборотного відображення  $\tilde{H}_n$  на  $H_n$ . В цьому випадку множини  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$  мають вигляд

$$\tilde{\Omega}_n = \{\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n : \tilde{u}_n = \Phi_n u_n, u_n \in \Omega_n = \Omega \cap H_n\}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \tilde{\Omega}_1 \neq \emptyset. \quad (5)$$

Будемо припускати надалі, що функціонали  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  пов'язані з вихідним функціоналом  $F(u)$  умовою близькості

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n)| \leq \tilde{\beta}_n, \quad \forall \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n, \quad (6)$$

де  $\tilde{\beta}_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а множини  $\tilde{\Omega}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  пов'язані з  $\Omega$  умовою

$$\forall u \in \Omega \quad \exists \{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}, \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n : \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n = u. \quad (7)$$

З умов (6) і (3), зокрема, виходить співвідношення

$$F^* - \tilde{\beta}_n \leq F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) - \tilde{\beta}_n \leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n), \quad \forall \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

звідки впливає обмеженість знизу кожного з наближених функціоналів  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на відповідній множині  $\tilde{\Omega}_n$ :  $\inf_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) = \tilde{F}_n^* > -\infty$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Будемо розглядати задачі мінімізації:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \rightarrow \inf, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Збіжність в  $H$  проєкційного методу розв'язання задачі (1) встановлює

**Теорема 1** [10]. Нехай  $\Omega$  – обмежена замкнена опукла множина з гільбертова простору  $H$ ,  $\tilde{\Omega}_n$  – множина виду (5) з гільбертова простору  $\tilde{H}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), пов'язана з  $\Omega$  умовою (7). Нехай виконується умова (3), функціонали  $F(u)$  і  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  опуклі і неперервні на  $\Omega$  і  $\tilde{\Omega}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  відповідно і задовольняють умову близькості (6). Тоді при кожному  $n = 1, 2, \dots$  функціонал  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  досягає на  $\tilde{\Omega}_n$  своєї нижньої грані і для будь-яких  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$  ( $\tilde{M}_n^*$  – множина точок мінімуму  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) = F^*$ . При цьому будь-яка послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$  є мінімізуючою для  $F(u)$  на  $\Omega$  і кожна її слабка гранична точка є точкою мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$ , а у разі єдиності точки мінімуму до неї слабо збігається вся послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ .

Нехай надалі  $\Omega$  – опукла замкнена обмежена множина в гільбертовому просторі  $H$  і  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – пов'язані з нею множини виду (5). При доведенні теореми 1 було показано, що з обмеженості, замкненості і опуклості в  $H$  множини  $\Omega$  впливає обмеженість, замкненість і опуклість в  $\tilde{H}_n$  множини  $\tilde{\Omega}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Припустимо, що при кожному  $n = 1, 2, \dots$



наближений функціонал  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  неперервно диференційований за Фреше на  $\tilde{\Omega}_n$ .

Для розв'язання задачі (1) мінімізації  $F(u)$  на  $\Omega$  будемо застосовувати до кожної з наближених задач (9) ітераційний метод умовного градієнту [11], причому будемо будувати лише кілька наближень  $\tilde{u}_n^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, k_n$ ,  $k_n \leq K$ ,  $K \in \mathbb{N}$ ), останнє з яких будемо використовувати за початкове наближення в ітераційному процесі для наступної наближеної задачі.

За початкове наближення в проекційно-ітераційному процесі візьмемо деякий елемент  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ . Дотримуючись [11], якщо вже відомо наближення  $\tilde{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n$  ( $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ), то беремо головну лінійну частину

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n) \equiv (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n}, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$$

прирошення  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} + o(\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n})$  і

визначаємо допоміжне наближення  $\bar{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n$  з умови

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = \min_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n) = \min_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n}. \quad (10)$$

Такий елемент  $\bar{u}_n^{(k)}$  на опуклій замкненій обмеженій множині  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$  для лінійного (і тим більше, опуклого) неперервного функціонала  $\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n)$  існує на підставі узагальненої теореми Вейерштраса [11]. При цьому, вочевидь,

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = \min_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n) \leq \tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)}) = 0. \quad (11)$$

Якщо виявиться, що  $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = 0$  при деякому  $k \leq k_n$ , то з урахуванням (10) для всіх  $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$  матимемо  $(\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \geq 0$ , звідки випливає, що елемент  $\tilde{u}_n^{(k)}$  задовольняє необхідну умову мінімуму функціонала  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на множині  $\tilde{\Omega}_n$  [11]. В цьому випадку ітерації для  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n$  припиняються і для з'ясування того, чи буде  $\tilde{u}_n^{(k)}$  точкою мінімуму  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n$ , а елемент  $\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k)}$  – точкою мінімуму функціонала  $F(u)$  на множині  $\Omega$ , потрібні додаткові дослідження поведінки цих функціоналів в околі зазначених точок. Зокрема, якщо функціонал  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  опуклий на  $\tilde{\Omega}_n$  і  $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = 0$ , то  $\tilde{u}_n^{(k)}$  справді буде точкою мінімуму  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n$ . Якщо ж елемент  $\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k)}$  не є точкою мінімуму функціонала  $F(u)$  на  $\Omega$ , то слід покласти  $\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k)}$  (зрозуміло, що  $\tilde{u}_{n+1}^{(0)} \in \tilde{\Omega}_{n+1}$ ) і продовжити ітерації вже для наступного наближеного функціонала  $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$  на множині  $\tilde{\Omega}_{n+1}$ . Надалі вважатимемо, що  $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) < 0$ . Тоді завідомо  $\bar{u}_n^{(k)} \neq \tilde{u}_n^{(k)}$  і за наступне наближення відповідно до формул методу умовного градієнту можна прийняти [3]

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = \tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \quad (12)$$

$$\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1,$$

де  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  ( $0 \leq \tilde{\alpha}_n^{(k)} \leq 1$ ) – кроковий множник, який вибирається з однієї із таких умов.

Умова А.  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  доставляє мінімум дійсній функції [12]

$$\tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n^{(k)}) = \min_{0 \leq \tilde{\alpha}_n \leq 1} \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n), \quad \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n) \equiv \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})); \quad (13)$$

Умова Б.  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  задовольняє нерівність [13]

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) \geq \tilde{\varepsilon}_n \tilde{\alpha}_n^{(k)} \left| \tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) \right|, \quad 0 \leq \tilde{\alpha}_n^{(k)} \leq 1, \quad (14)$$

де  $\tilde{\varepsilon}_n$  – параметр алгоритму,  $0 < \tilde{\varepsilon}_n < 1$ ;

Умова В. Якщо градієнт  $\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n)$  задовольняє на  $\tilde{\Omega}_n$  умову Ліпшиця

$$\left\| \tilde{F}_n'(\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n'(\tilde{v}_n) \right\| \leq L \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}, \quad \forall \tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad L > 0, \quad (15)$$

то  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  визначається так [13]:

$$\tilde{\alpha}_n^{(k)} = \tilde{\gamma}_n^{(k)} \tilde{\eta}_n^{(k)}, \quad (16)$$

де  $\tilde{\eta}_n^{(k)} = \min\{1; |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| / \|\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n}^2\}$ ,  $\tilde{\delta}_n \leq \tilde{\gamma}_n^{(k)} \leq 2(1 - \tilde{\varepsilon}_n)/L$ ,  $\tilde{\varepsilon}_n$  і  $\tilde{\delta}_n$

– параметри алгоритму,  $0 < \tilde{\delta}_n \leq 2(1 - \tilde{\varepsilon}_n)/L$ ,  $0 < \tilde{\varepsilon}_n < 1$ .

В силу опуклості  $\tilde{\Omega}_n$  ітераційне наближення  $\tilde{u}_n^{(k+1)}$ , що визначається за формулою (12), вочевидь, належить  $\tilde{\Omega}_n$  при всіх  $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$ .

Розглянемо питання про збіжність і оцінку швидкості збіжності різних варіантів проєкційно-ітераційного процесу (10), (12) для задачі (1) в залежності від умови вибору крокового множника  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$ .

*Вибір крокового множника з умови А.* Нехай  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  в процесі (10), (12) вибирається з умови (13) (умови А). При такому виборі  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  послідовність  $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\}_{k=0}^\infty$  не зростає, так як  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = \tilde{g}_n^{(k)}(0) \geq \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n^{(k)}) = \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Для визначення  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  можуть бути використані відомі методи одновимірної мінімізації [11].

**Теорема 2** [3]. Нехай функціонал  $F(u)$  визначений на опуклій замкненій обмеженій множині  $\Omega$  гільбертова простору  $H$ , а функціонал  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  – на множині  $\tilde{\Omega}_n$  виду (5) гільбертова простору  $\tilde{H}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причому виконані умови (3), (6) і  $\sum_{n=1}^\infty \tilde{\beta}_n < \infty$ . Нехай при кожному  $n = 1, 2, \dots$

$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$  і градієнт  $\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n)$  задовольняє на  $\tilde{\Omega}_n$  умову Ліпшиця (15). Тоді послідовність наближень  $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ ,  $k_n \leq K$ , яка визначається згідно з

умовами (10), (12), (13) при  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^2 < \infty$ , існує і  $\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  для всіх  $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$  при будь-якому виборі  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ .

Позначимо через  $D = \sup_{u, v \in \Omega} \|u - v\|_H$  і  $\tilde{D}_n = \sup_{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n} \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}$  діаметри множин  $\Omega \subset H$  і  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) відповідно. Оскільки  $\Omega$  і  $\tilde{\Omega}_n$  обмежені, то  $D < \infty$ ,  $\tilde{D}_n < \infty$  і, крім того, для  $\tilde{D}_n$  з урахуванням (4), (5) справедлива оцінка

$$\tilde{D}_n = \sup_{\tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n} \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n} = \sup_{u_n, v_n \in \Omega_n} \|\Phi_n u_n - \Phi_n v_n\|_{\tilde{H}_n} \leq C'D, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

**Теорема 3.** Нехай зберігають силу всі умови теореми 2. Нехай, крім того, виконано (7), функціонали  $F(u)$  і  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  опуклі на  $\Omega \subset H$  і  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  відповідно і  $F(u) \in C(\Omega)$ . Нехай  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$  вибрано довільно і послідовність  $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $k_n \leq K$  визначена згідно з умовами (10), (12), (13), причому  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^2 < \infty$ . Тоді для всіх  $k = 1, 2, \dots, k_n$  існує

$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^*$ , послідовність  $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$  є мінімізуючою для  $F(u)$  на  $\Omega$  і будь-яка її слабка гранична точка є точкою мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$ , причому в разі єдиності точки мінімуму до неї слабко збігається вся послідовність  $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ . Якщо до того ж, починаючи з деякого  $n = N > 1$ , число ітерацій  $k_n$  задовольняє умову

$$k_n \leq 2LC'^2 D^2, \quad (18)$$

то справедлива оцінка

$$0 \leq a_n = F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \leq \sigma_n, \quad n \geq N, \quad (19)$$

де  $\sigma_n = M \prod_{j=N+1}^n q_j + 2 \sum_{i=N+2}^{n+1} (\tilde{\beta}_{i-1} + \tilde{\beta}_{i-2}) \prod_{j=i}^n q_j$ ,  $M > 0$  – стала, яка не залежить від  $n$ ,  $q_n = 1 - 4\bar{\theta}_n(2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)k_n / (2LC'^2 D^2)$ ,  $0 < \bar{\theta}_n < 1$ ,  $\zeta_n \leq 2\tilde{\beta}_{n-1}$ ,  $L > 0$  і  $C' > 0$  визначені в (15) і (4) відповідно,  $D$  – діаметр множини  $\Omega$ .

**Д о в е д е н н я.** Нехай  $u^*$  – точка мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega \subset H$ ,  $\tilde{u}_n^*$  – точка мінімуму  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ( $u^* \in M^*$ ,  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $M^*$  і  $\tilde{M}_n^*$  – множини точок мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$  і  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n$  відповідно).

Для опуклого функціонала  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$  на опуклій множині  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) з урахуванням (10) можна отримати [11]:

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) &\leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \leq (\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^*)_{\tilde{H}_n} = \\ &= -\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^*) \leq -\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - F^* \right| \leq \left| \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \right| + \left| \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* \right| \leq \\ & \leq -\tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)}) + \left| \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* \right|, \quad k = 1, 2, \dots, k_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Так як при  $n \rightarrow \infty$   $\tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)}) \rightarrow 0$  для зазначених  $k$  в силу теореми 2, а  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* \rightarrow 0$  для будь-яких  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$  в силу теореми 1, то, переходячи в останній нерівності до границі, отримуємо:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_n$ .

Далі, використовуючи (6) і (20), матимемо

$$\begin{aligned} 0 \leq F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* &= F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \leq \\ &\leq -\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)}) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* + \tilde{\beta}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

звідки при  $n \rightarrow \infty$  впливає граничне співвідношення  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) = F^*$ ,

тобто  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$  – мінімізуюча послідовність для функціонала  $F(u)$  на  $\Omega$ .

В силу слабкої компактності множини  $\Omega$ , послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$  має хоча б одну слабку граничну точку  $v^* \in \Omega$ , яка є слабкою границею деякої підпослідовності  $\{\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}\}_{i=1}^\infty$ :  $\lim_{i \rightarrow \infty} (f, \Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})})_H = (f, v^*)_H$ ,  $\forall f \in H$ , а оскільки функціонал  $F(u)$  слабо напівнеперервний знизу на  $\Omega$ , то

$$F^* = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}) \geq \liminf_{i \rightarrow \infty} F(\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}) \geq F(v^*) \geq F^*,$$

тобто  $F(v^*) = F^*$ . Якщо  $F(u)$  досягає свого мінімуму в єдиній точці  $u^* \in \Omega$ , то вся послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$  слабо збігається до  $u^*$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)})_H = \lim_{i \rightarrow \infty} (f, \Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})})_H = (f, u^*)_H, \quad \forall f \in H.$$

Доведемо оцінку (19). Так як

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) = \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n^{(k)}) \leq \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n) = \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}))$$

для всіх  $\tilde{\alpha}_n$ ,  $0 \leq \tilde{\alpha}_n \leq 1$ , то, користуючись результатом леми 2.1.1 із [11]

$$\tilde{F}_n(\tilde{v}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \leq -(\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n - \tilde{v}_n)_{\tilde{H}_n} + \frac{L}{2} \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}^2, \quad \forall \tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n \quad (22)$$

при  $\tilde{u}_n = \tilde{u}_n^{(k)}$ ,  $\tilde{v}_n = \tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})$ ,  $0 \leq k \leq k_n - 1$ , а також оцінками (11), (17), отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) &\leq \tilde{\alpha}_n (\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}), \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} + \frac{L}{2} \tilde{\alpha}_n^2 \|\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n}^2 \leq \\ &\leq -\tilde{\alpha}_n |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + LC'^2 D^2 \tilde{\alpha}_n^2 / 2, \quad 0 \leq \tilde{\alpha}_n \leq 1, \quad 0 \leq k \leq k_n - 1. \end{aligned}$$

З урахуванням цього матимемо для довільного  $n > 1$ :

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) = \sum_{k=0}^{k_n-1} (\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq$$

$$\leq -\tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 + |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})|,$$

а оскільки в силу умови близькості (6) і другої частини формули (12)

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})| \leq |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(0)})| + |F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(0)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})| + \\ + |F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})| \leq \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}, \quad n > 1,$$

то для зазначених  $n > 1$  матимемо:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq -\tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 + \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}.$$

Тоді з використанням (6) можна отримати

$$F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) = F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \\ - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) + \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq -\tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + \\ + LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n > 1. \quad (23)$$

Оскільки, за теоремою 2,  $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  при всіх  $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$ , то знайдеться число  $n = N_0 > 1$ , починаючи з якого величина  $\bar{\alpha}_n = \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| / (LC'^2 D^2 k_n)$  задовольнятиме умову  $0 \leq \bar{\alpha}_n \leq 1$ .

Тоді мінімальне значення функції

$$LC'^2 D^2 k_n \tilde{\alpha}_n^2 / 2 - \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}$$

змінної  $\tilde{\alpha}_n$  при  $-\infty < \tilde{\alpha}_n < +\infty$ , яке досягається при  $\tilde{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n$ , збігатиметься з мінімальним її значенням на відрізку  $0 \leq \tilde{\alpha}_n \leq 1$  при всіх  $n \geq N_0$ . Тому, покладаючи в оцінці (23)  $\tilde{\alpha}_n = \bar{\alpha}_n$ , отримуємо для всіх  $n \geq N_0$ :

$$F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq - \left( \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| \right)^2 / (2LC'^2 D^2 k_n) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}.$$

Так як  $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) \rightarrow 0$  з ростом  $k$ , то за умови  $|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| \geq |\tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)})|$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$  матимемо для всіх  $n \geq N_0$ :  
 $F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq -k_n |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|^2 / (2LC'^2 D^2) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}$ ,  
 або, приймаючи позначення

$$a_n = F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*, \quad \rho_n = k_n / (2LC'^2 D^2), \quad (24) \\ a_n - a_{n-1} \leq -\rho_n |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n \geq N_0.$$

Далі, при кожному  $n = 1, 2, \dots$  з (8) маємо:  $F^* - \tilde{\beta}_n \leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)$ ,  $\forall \tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$ . З іншого боку, для будь-яких  $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$  і  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$  з урахуванням (6) виходить:

$$0 \leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) = \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n) + F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \leq \\ \leq \tilde{\beta}_n + F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*).$$

Звідси випливає, що  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \leq \tilde{\beta}_n + F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n)$ , так що має силу співвідношення

$$F^* - \tilde{\beta}_n \leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \leq \tilde{\beta}_n + F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n), \quad \forall \tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*, \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

на підставі якого

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* \leq \tilde{\beta}_n + \zeta_n, \quad \forall \tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

де  $\zeta_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{v}_n) - F^*$  ( $\tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n, n = 1, 2, \dots$  – послідовність, пов’язана з  $u^*$  співвідношенням  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^{-1}\tilde{v}_n = u^*$ , так що  $\zeta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ). Тоді з (21) маємо

$$|\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\tilde{u}_n^{(k_n-1)})| \geq a_n - 2\tilde{\beta}_n - \zeta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

тому

$$a_{n-1} - a_n \geq \rho_n (a_n - 2\tilde{\beta}_n - \zeta_n)^2 - 2\tilde{\beta}_n - 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n \geq N_0,$$

або

$$\rho_n (a_n - 2\tilde{\beta}_n - \zeta_n)^2 + (a_n - 2\tilde{\beta}_n) - (a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1}) \leq 0, \quad n \geq N_0.$$

Якщо  $\zeta_n \leq 2\tilde{\beta}_{n-1}$  ( $n \geq N_0$ ), то розв’язання останньої нерівності відносно  $a_n$  з урахуванням того, що  $a_n \geq 0$ , дає

$$0 \leq a_n \leq (-1 + \sqrt{\Delta_n}) / (2\rho_n) + 2\tilde{\beta}_n + \zeta_n, \quad n \geq N_0, \quad (27)$$

де  $\Delta_n = 1 + 4\rho_n(a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)$ .

Застосуємо узагальнену формулу біному Ньютона для оцінки  $\sqrt{\Delta_n}$  в (27). Позначимо через  $z_n = 4\rho_n(a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)$ , так що  $\sqrt{\Delta_n} = (1 + z_n)^{1/2}, n \geq N_0$ . Оскільки,  $a_n \rightarrow 0, \tilde{\beta}_n \rightarrow 0, \zeta_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), то знайдеться число  $N \geq N_0$  таке, що при всіх  $n \geq N$  будуть виконані одночасно умова (18) і нерівність

$$0 \leq a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n \leq 1/4, \quad (28)$$

Тоді для вказаних  $n$ , згідно з (18), (24), буде  $\rho_n \leq 1$  і, як наслідок з цього і (28),  $z_n \leq 1$ , що гарантує [14] при будь-якому значенні  $r$  збіжність ряду

$$(1 + z_n)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (r - j) z_n^i = \sum_{i=0}^m \frac{r(r-1)\dots(r-i+1)}{i!} z_n^i + R_n^{(m)}(z_n),$$

де  $R_n^{(m)}(z_n) = \frac{r(r-1)\dots(r-m)}{m!} z_n^{m+1} \left( \frac{1 - \theta_n}{1 + \theta_n z_n} \right)^m (1 + \theta_n z_n)^{r-1}$  – залишковий член

ряду при даному  $m \geq 0$ ;  $0 < \theta_n < 1, n \geq N$ . Представимо  $\sqrt{\Delta_n} = (1 + z_n)^{1/2}$  у вигляді суми двох членів зазначеного ряду та його залишкового члену:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_n} &= (1 + z_n)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}z_n + R_n^{(1)}(z_n) = 1 + \frac{1}{2}z_n - \frac{1}{4}z_n^2 \frac{1 - \theta_n}{\sqrt{(1 + \theta_n z_n)^3}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}z_n - \frac{1}{4}\bar{\theta}_n z_n^2, \quad \bar{\theta}_n = \frac{1 - \theta_n}{\sqrt{(1 + \theta_n z_n)^3}}, \quad 0 < \bar{\theta}_n < 1, \quad n \geq N. \end{aligned}$$

Тоді формула (27) для  $n \geq N$  набуде вигляду

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2\rho_n} \left( \frac{1}{2} z_n - \frac{1}{4} \bar{\theta}_n z_n^2 \right) + 2\tilde{\beta}_n + \zeta_n = a_{n-1} - 2\bar{\theta}_n \rho_n (a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)^2 + 2\tilde{\beta}_n +$$

$$+ 2\tilde{\beta}_{n-1} \leq a_{n-1} - 4\bar{\theta}_n \rho_n a_{n-1} (2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1} = q_n a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1},$$

де  $q_n = 1 - 4\bar{\theta}_n \rho_n (2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n)$ , а з того, що  $0 < 4\bar{\theta}_n \rho_n (2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n) \leq \bar{\theta}_n z_n < 1$ ,  $n \geq N$ , випливає, що  $0 < q_n < 1$  для всіх зазначених  $n$ .

З урахуванням цього отримуємо:

$$0 \leq a_n \leq q_n a_{n-1} + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1} \leq q_n q_{n-1} a_{n-2} + 2q_n (\tilde{\beta}_{n-1} + \tilde{\beta}_{n-2}) + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1} \leq \dots \leq$$

$$\leq a_N \prod_{j=N+1}^n q_j + 2 \sum_{i=N+2}^{n+1} (\tilde{\beta}_{i-1} + \tilde{\beta}_{i-2}) \prod_{j=i}^n q_j, \quad n \geq N.$$

Користуючись теоремою 6.2.3 із [11] про збіжність методу умовного градієнту для задачі мінімізації (9), знаходимо при  $n = N$ :

$$0 \leq a_N = F(\Phi_N^{-1} \tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) + \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N^* + \tilde{F}_N^* - F^* \leq$$

$$\leq \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(k_N)}) - \tilde{F}_N^* + 2\tilde{\beta}_N + \zeta_N \leq B/k_N + 2\tilde{\beta}_N + \zeta_N = M, \quad \tilde{k}_N < k_N \leq 2LC'^2 D^2,$$

де  $B = \max\{2LC'^2 D^2; \tilde{F}_N(\tilde{u}_N^{(0)}) - \tilde{F}_N^*\}(k_N + 1)$ ,  $\tilde{F}_N^* = \inf_{\tilde{u}_N \in \tilde{\Omega}_N} \tilde{F}_N(\tilde{u}_N)$ ,  $\tilde{u}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$ ,

$\tilde{k}_N \geq 1$  – номер ітерації, починаючи з якого  $\alpha_N = |\tilde{F}_N^{(k)}(\tilde{u}_N^{(k)})| / (LC'^2 D^2)$  задовольняє умову  $0 \leq \alpha_N < 1$ . Таким чином, справедливість оцінки (19) встановлена. Якщо до того ж  $0 < q_n \leq q < 1$  для всіх  $n \geq N$ , то в (19)  $\sigma_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема доведена. ■

На практиці при розв'язуванні задач мінімізації виду (1) обмеження (18) на вибір чисел  $k_n$  може виявитись занадто жорстким і навіть нездійсненним. В зв'язку з цим корисною може бути така оцінка швидкості збіжності проєкційно-ітераційного процесу (10), (12) (13), яка, хоча і буде, можливо, завищеною в порівнянні з (19), але не потребуватиме додаткових обмежень на вибір  $k_n$  і на швидкість збіжності  $\{F(\Phi_n^{-1} \tilde{v}_n)\}_{n=1}^\infty$  до  $F^*$ .

**Теорема 4** [8]. *Нехай виконуються всі умови теореми 3, за винятком (18). Тоді справедлива оцінка*

$$0 \leq a_n = F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \leq \sigma_n, \quad n \geq 1, \quad (29)$$

$$\text{де } \sigma_n = M \prod_{j=2}^n q_j + \sum_{i=2}^n \tilde{\alpha}_i k_i (\zeta_i + LC'^2 D^2 \tilde{\alpha}_i / 2) \prod_{j=i}^n q_j + 4 \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{\beta}_i \prod_{j=i+1}^n q_j + 2\tilde{\beta}_n, \quad n > 1;$$

$\sigma_1 = B/k_1 + 2\tilde{\beta}_1 + \zeta_1$ ;  $q_n = 1/(1 + \tilde{\alpha}_n k_n)$ ,  $0 < \alpha \leq \tilde{\alpha}_n \leq 1$ ;  $\zeta_n$  даються в (25);  $M > 0$ ,  $B > 0$  – сталі, які не залежать від  $n$ ;  $L > 0$  і  $C' > 0$  визначені в (15) і (4) відповідно,  $D$  – діаметр множини  $\Omega$ .

В умовах теореми 3 може бути також отримана оцінка, яка характеризує швидкість збіжності послідовності  $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^\infty$  до  $F^*$ . А саме, з першої частини співвідношення (21) з урахуванням (6) і (19) (або (29)) випливає:

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \leq |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)})| + |F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \leq \sigma_n + \tilde{\beta}_n. \quad (30)$$

**Теорема 5** [8]. Нехай виконуються всі умови теореми 2, за винятком (3), і умова (7). Нехай, крім того, функціонал  $F(u)$  неперервний і сильно опуклий на  $\Omega \subset H$ , а функціонали  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  опуклі на  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n=1,2,\dots$  відповідно. Тоді послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ , де  $\tilde{u}_n^{(k_n)}$  визначаються згідно з умовами (10), (12), (13) і  $\sum_{n=1}^\infty \tilde{\alpha}_n^2 < \infty$ , збігається до єдиної точки  $u^*$  мінімуму  $F(u)$  на

$\Omega$  за нормою простору  $H$  при будь-якому  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$  і справедлива оцінка

$$\|\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|_H^2 \leq 2\sigma_n/\chi, \quad n \geq 1,$$

де  $\sigma_n \geq 0$  визначено в (19) (або в (29)),  $\chi > 0$  – стала з умови сильної опуклості  $F(u)$  на  $\Omega$ .

Вибір крокового множника з умов  $B$  і  $V$ . Нехай при розв'язанні задачі мінімізації (1) в проєкційно-ітераційному процесі (10), (12)  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  вибирається з умови (14) (умови Б). Нижче буде показано, що при деяких обмеженнях на функціонали  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ,  $n=1,2,\dots$  такий вибір  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  можливий. На практиці спочатку обирають  $\tilde{\alpha}_n^{(k)} = 1$  і перевіряють умову (14). Якщо вона виконана, то залишають  $\tilde{\alpha}_n^{(k)} = 1$ ; якщо ж ні, то здійснюють дроблення  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$  до тих пір, поки не виконається (14), намагаючись при цьому зупинитися на значенні  $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$ , по можливості близькому до одиниці [11].

**Теорема 6** [9]. Нехай функціонал  $F(u)$  визначений на опуклій замкненій обмеженій множині  $\Omega$  гільбертова простору  $H$ , а функціонал  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  – на множині  $\tilde{\Omega}_n$  виду (5) гільбертова простору  $\tilde{H}_n$  ( $n=1,2,\dots$ ), причому виконані умови (3), (6) і  $\sum_{n=1}^\infty \tilde{\beta}_n < \infty$ . Нехай при кожному  $n=1,2,\dots$

$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$  і градієнт  $\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n)$  задовольняє на  $\tilde{\Omega}_n$  умову Ліпшиця (15). Тоді послідовність наближень  $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ ,  $k_n \leq K$ , яка визначається відповідно до умов (10), (12), (14), існує і  $\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})_{\tilde{H}_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  ( $k=0,1,\dots,k_n-1$ ) при будь-якому виборі  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ .

**Теорема 7.** Нехай зберігають силу всі умови теореми 6. Нехай, крім того, виконана умова (7), функціонали  $F(u)$  і  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ,  $n=1,2,\dots$  опуклі на  $\Omega \subset H$  і  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n=1,2,\dots$  відповідно і  $F(u) \in C(\Omega)$ . Нехай  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$  вибрано довільно і послідовність  $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ ,  $k_n \leq K$  визначена відповідно до умов (10), (12), (14). Тоді для всіх  $k=1,2,\dots,k_n$  існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^*$ , послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$  є мінімізуючою для  $F(u)$  на  $\Omega$  і будь-яка її слабка



гранична точка є точкою мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$ , причому в разі єдиності точки мінімуму до неї слабо збігається вся послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$ . Якщо до того ж, починаючи з деякого  $n=N>1$ , число ітерацій  $k_n$  задовольняє умову  $k_n \leq C'^2 D^2 / (\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n)$ , то справедлива оцінка

$$0 \leq a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \leq \sigma_n, \quad n \geq N, \quad (31)$$

де  $\sigma_n = M \prod_{j=N+1}^n q_j + 2 \sum_{i=N+2}^{n+1} (\tilde{\beta}_{i-1} + \tilde{\beta}_{i-2}) \prod_{j=i}^n q_j$ ,  $M > 0$  – стала, яка не залежить від  $n$ ;  $q_n = 1 - 4 \bar{\theta}_n (2\tilde{\beta}_{n-1} - \zeta_n) \tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n k_n / (C'^2 D^2)$ ,  $\zeta_n \leq 2\tilde{\beta}_{n-1}$ ,  $0 < \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_n < 1$ ,  $0 < \tilde{\delta} \leq \tilde{\delta}_n \leq 2(1 - \tilde{\varepsilon}_n)/L$ ,  $0 < \bar{\theta}_n < 1$ ;  $C' > 0$  і  $L > 0$  визначені в (4) і (15) відповідно,  $D$  – діаметр множини  $\Omega$ .

Д о в е д е н н я. Нехай  $u^*$  – точка мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega \subset H$ ,  $\tilde{u}_n^*$  – точка мінімуму  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ( $u^* \in M^*$ ,  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $M^*$  і  $\tilde{M}_n^*$  – множини точок мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$  і  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  на  $\tilde{\Omega}_n$  відповідно).

Повторюючи міркування, аналогічні проведеним при доведенні теореми 3, можна переконатись, що послідовність  $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\}_{n=1}^\infty$ , де  $\tilde{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n$  визначені відповідно до умов (10), (12), (14), збігається до  $F^*$  при  $n \rightarrow \infty$  для будь-яких  $k = 1, 2, \dots, k_n$ . Дійсно, так як при  $n \rightarrow \infty$   $\tilde{F}_n^{(k-1)}(\tilde{u}_n^{(k-1)}) \rightarrow 0$  для вказаних  $k$  в силу теореми 6, а  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^* \rightarrow 0$  для будь-яких  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{M}_n^*$  в силу теореми 1, то існування  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^*$  для всіх  $k = 1, 2, \dots, k_n$  негайно впливає з (20) при переході до границі при  $n \rightarrow \infty$ . З тих же підстав, зі співвідношення (21) виходить, що послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$  є мінімізуючою для  $F(u)$  на  $\Omega$ . Доведення слабкої збіжності  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$  до точок із множини  $M^*$  проводиться дослівно доведенню аналогічного факту з теореми 3.

Отримаємо оцінку (31). Як показано в [9] при доведенні теореми 6,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) &\leq -\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} \min \left\{ 1; \frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)})|}{C'^2 D^2} \right\} |\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)})| + \\ &+ \tilde{\beta}_n + \tilde{\beta}_{n-1}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Тому з використанням (6) можна отримати

$$\begin{aligned} F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) &= F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \\ &- \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) + \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) - F(\Phi_{n-1}^{-1}\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq \\ &\leq -\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n \sum_{k=0}^{k_n-1} \min \left\{ 1; \frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)})|}{C'^2 D^2} \right\} |\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)})| + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

В силу теореми 6,  $\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для будь-яких  $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$ , тому знайдеться число  $N_0 > 1$  таке, що при всіх  $n \geq N_0$  буде

$$\min \left\{ I; \frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C'^2 D^2} \right\} = \frac{|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|}{C'^2 D^2}, \quad k=0, 1, \dots, k_n - 1,$$

і для зазначених  $n \geq N_0$  матимемо

$$F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq -\frac{\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n}{C'^2 D^2} \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}.$$

Так як  $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) \rightarrow 0$  з ростом  $k$  при кожному фіксованому  $n \geq N_0$ , то за умови  $|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| \geq |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|$ ,  $k=0, 1, \dots, k_n - 1$  матимемо:

$$F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \leq -\frac{\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n}{C'^2 D^2} k_n |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1},$$

або, приймаючи позначення  $a_n = F(\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*$ ,  $\rho_n = \tilde{\varepsilon}_n \tilde{\delta}_n k_n / (C'^2 D^2)$ ,

$$a_n - a_{n-1} \leq -\rho_n |\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)})|^2 + 2\tilde{\beta}_n + 2\tilde{\beta}_{n-1}, \quad n \geq N_0.$$

Подальші міркування з отримання оцінки для  $a_n$  повністю збігаються з аналогічними міркуваннями при доведенні оцінки в теоремі 3. Якщо для всіх зазначених в (28) значень  $n \geq N$   $0 < q_n \leq q < 1$ , то в (31)  $\sigma_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема доведена. ■

В умовах теореми 7 може бути також отримана оцінка, що характеризує швидкість збіжності послідовності  $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=N}^{\infty}$  до  $F^*$ . Аналогічно (30),

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \leq \sigma_n + \tilde{\beta}_n, \quad n \geq N,$$

де  $\sigma_n \geq 0$  і  $\tilde{\beta}_n > 0$  визначені в (31) і (6) відповідно.

**Теорема 8** [9]. *Нехай виконуються всі умови теореми 2, за винятком (3), і умова (7). Нехай, крім того, функціонал  $F(u)$  неперервний і сильно опуклий на  $\Omega \subset H$ , а  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  опуклі на  $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  відповідно. Тоді послідовність  $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ , де  $\tilde{u}_n^{(k_n)}$  визначаються відповідно до умов (10), (12), (14), збігається до єдиної точки  $u^*$  мінімуму  $F(u)$  на  $\Omega$  за нормою простору  $H$  при будь-якому виборі  $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$  і справедлива оцінка*

$$\|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|_H^2 \leq 2\sigma_n / \chi, \quad n \geq N,$$

де  $\sigma_n \geq 0$  визначено в (31),  $\chi > 0$  – стала з умови сильної опуклості функціонала  $F(u)$  на  $\Omega$ .

Зауважимо, що наведені схеми проєкційного методу, а також проєкційно-ітераційного методу (10), (12) з вибором крокового множника з умови А, Б або В зберігаються без змін і в рефлексивних банахових просторах [10].

**Аналіз одержаних результатів та висновки.** У роботі досліджено різні варіанти проєкційно-ітераційного методу, заснованого на методі умовного градієнту, для розв'язання задачі умовної мінімізації функціонала в гільбертовому просторі. При достатньо загальних умовах апроксимації вихідної задачі розглянуті питання збіжності проєкційно-ітераційних процесів наближень, що виникають в результаті проектування в гільбертові простори, ізоморфні підпросторам

вихідного простору. Встановлені умови, за якими проекційно-ітераційні послідовності наближень мінімізують вихідний функціонал та слабо (або сильно) збігаються за нормою основного простору до точки мінімуму функціонала на розглядуваній множині. Отримано теоретичні оцінки швидкості збіжності та похибки за функціоналом (а у випадку сильно опуклого функціонала, й за аргументом) кожного з варіантів проекційно-ітераційного методу залежно від способу вибору крокового множника в методі умовного градієнту. Методика досліджень і результати статті можуть бути використані при розробці і теоретичному обґрунтуванні інших проекційно-ітераційних методів і алгоритмів розв'язання нескінченновимірних екстремальних задач, в тому числі без обмежень, а також при наближеному розв'язуванні деяких класів задач оптимального керування.

### Бібліографічні посилання

1. Методы оптимизации сложных систем [Текст] / И. В. Кузьмин, М. М. Биков, С. М. Москвина, А. И. Кузьмин. – Винница: ВДТУ, 2003. – 165 с.
2. Буда́к Б. М. Об аппроксимации экстремальных задач [Текст]: в 2 ч. / Б. М. Буда́к, Б. М. Беркович, Е. Н. Соловьева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 2, № 3. – С. 580-506; № 4. – С. 870-884.
3. Тавадзе Э. Л. Проекционно-итерационный метод решения задачи минимизации с ограничениями, основанный на методе условного градиента [Текст] / Э. Л. Тавадзе, Л. Л. Тавадзе // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 1998. – № 3. – С. 18-21.
4. Балашова С. Д. Некоторые способы аппроксимации задачи минимизации сильно выпуклого функционала [Текст] / С. Д. Балашова, З. Т. Плаксий. – Днепропетровск, 1983. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ, № 781 – В 83.
5. Балашова С. Д. О решении задач минимизации проекционно-итерационными методами [Текст] / С. Д. Балашова // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д.: ДГУ, 1996. – С. 99-104.
6. Балашова С. Д. О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями [Текст] / С. Д. Балашова, Э. Л. Тавадзе // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д.: ДГУ, 1996. – С. 128-134.
7. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационный вариант метода сопряженных градиентов [Текст] / Э. Л. Гарт // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2003. – С. 38–48.
8. Гарт Л. Л. Об оценке скорости сходимости проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации с ограничениями [Текст] / Л. Л. Гарт // Динамические системы.– Симферополь: КФТ, 2012.– Т. 2(30).– № 3-4. – С. 211-225.
9. Гарт Л. Л. Проекционно-итерационная реализация метода условного градиента минимизации функционала в гильбертовом пространстве [Текст] / Л. Л. Гарт // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 3. – С. 104-117.
10. Гарт Л. Л. Проекційно-ітераційні методи розв'язання операторних рівнянь та задач нескінченновимірної оптимізації [Текст]: автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01 / МОН України. – Д., 2017. – 40 с.
11. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 376 с.

12. **Трухаев Р. И.** Теория неклассических вариационных задач [Текст] / Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – 168 с.
13. **Данилин Ю. М.** Методы минимизации, основанные на аппроксимации исходного функционала выпуклым [Текст] / Ю. М. Данилин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970. – Т. 10, № 5. – С. 1067–1080.
14. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики [Текст]: в 5 т. Т. 1. / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 479 с.

*Надійшла до редколегії 05.03.2018.*

**В.Г. Городецкий, Н.П. Осадчук**

*Национальный технический университет Украины "КПИ им. Игоря Сикорского"*

## **РЕКОНСТРУКЦИЯ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПЕРСПЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

Выполнена реконструкция системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лоренца с использованием метода перспективных коэффициентов. Найдены четыре системы, общий вид уравнений которых не совпадает с уравнениями системы Лоренца, но которые способны воспроизвести временной ряд одной из переменных системы Лоренца.

Ключевые слова: временной ряд, дифференциальные уравнения, реконструкция, оригинальная система, стандартная система, метод перспективных коэффициентов.

Виконана реконструкція системи звичайних диференціальних рівнянь Лоренца з використанням метода перспективних коефіцієнтів. Знайдені чотири системи, загальний вигляд рівнянь яких не співпадає з рівняннями системи Лоренца, але які здатні відтворити часовий ряд однієї зі змінних системи Лоренца. В багатьох галузях науки є актуальною проблема ідентифікації системи звичайних диференціальних рівнянь за часовою послідовністю однієї спостережуваної змінної. Якщо праві частини рівнянь системи є поліномами, то розв'язання такої задачі тільки за допомогою чисельних методів призводить до отримання моделі, що в більшості випадків містить надлишкові складові та не відображає фізику процесу. Попередній вибір структури системи дозволяє покращити точність реконструкції.

Оскільки в даному дослідженні розглядається тільки часова послідовність спостережуваної змінної та немає додаткових вимог до систем-кандидатів, то виконувався пошук тільки систем звичайних диференціальних рівнянь, що мають найменшу кількість складових в рівняннях. Пошук систем-кандидатів виконувався серед окремих випадків системи з поліномами другого ступеня в правих частинах рівнянь. Для розв'язання поставленої задачі застосовувалася запропонована в [12, 11] комбінація аналітичного та чисельного методів. Назвемо оригінальною системою (ОС) систему рівнянь, що точно описує динаміку досліджуваного процесу. В дослідженні також застосовувалася стандартна система (СС), що містить поліноміальну або дробово-раціональну функцію тільки в одному рівнянні. Кількість змінних ОС та СС однакова. Спостережувана змінна СС співпадає зі спостережуваною змінною ОС, і всі коефіцієнти СС можуть бути аналітично виражені через коефіцієнти ОС. Крім того, існує чисельний метод [12], що дозволяє визначити коефіцієнти СС за часовою послідовністю. Для пошуку найпростішої ОС застосовувався метод перспективних коефіцієнтів [10], який полягає в наступному. Спочатку чисельним методом за часовою послідовністю реконструюється СС. Далі, за аналітичними співвідношеннями та структурою СС визначається які коефіцієнти ОС точно нульові та точно ненульові і формується початкова система (ПС), що включає тільки точно ненульові коефіцієнти. Після цього ПС доповнюється коефіцієнтами ОС поки СС, що відповідає ОС, не співпадатиме з СС, отриманою чисельним методом. Результатом буде одна або декілька ОС. За допомогою такого підходу були знайдені 4 структури ОС з 7 коефіцієнта-

ми, що відрізняються від системи Лоренца [17], але здатні точно відтворити часову послідовність змінної  $X$  системи Лоренца. Для кожної ОС були знайдені числові значення частини коефіцієнтів та співвідношення, що зв'язують решту коефіцієнтів між собою.

**Ключові слова:** часовий ряд, диференціальні рівняння, реконструкція, оригінальна система, стандартна система, метод перспективних коефіцієнтів.

Reconstruction of the Lorenz ordinary differential equations system is performed by using perspective coefficients method. Four systems that have structures different from Lorenz system and can reproduce time series of one variable of Lorenz system were found. In many areas of science, the problem of identifying a system of ordinary differential equations (ODE) from a time series of one observable variable is relevant. If the right-hand sides of an ODE system are polynomials, then solving such a problem only by numerical methods allows to obtain a model containing, in most cases, redundant terms and not reflecting the physics of the process. The preliminary choice of the structure of the system allows to improve the precision of the reconstruction.

Since this study considers only the single time series of the observable variable, and there are no additional requirements for candidate systems, we will look only for systems of ODE's that have the least number of terms in the equations. We will look for candidate systems among particular cases of the system with quadratic polynomial right-hand sides.

To solve this problem, we will use a combination of analytical and numerical methods proposed in [12, 11]. We call the original system (OS) the ODE system, which precisely describes the dynamics of the process under study. We also use another type of ODE system - standard system (SS), which has the polynomial or rational function only in one equation. The number of OS variables is equal to the number of SS variables. The observable variable of the SS coincides with the observable variable of the OS. The SS must correspond to the OS. Namely, all the SS coefficients can be analytically expressed in terms of the OS coefficients. In addition, there is a numerical method [12], which allows to determine the SS coefficients from a time series. To find only the simplest OS, one can use the perspective coefficients method [10], which means the following. Initially, the SS is reconstructed from a time series using a numerical method. Then, using analytical relations and the structure of the SS, we determine which OS coefficients are strictly zero and strictly non-zero and form the initial system (IS), which includes only strictly non-zero coefficients. After that, the IS is supplemented with OS coefficients until the corresponding SS coincides with the SS obtained by a numerical method. The result will be one or more OS's. Using this approach, we have found 4 OS structures with 7 coefficients that differ from the Lorenz system [17], but are able to reproduce exactly the time series of  $X$  variable of the Lorenz system. Numerical values of the part of the coefficients and relations connecting the rest of the coefficients were found for each OS.

**Keywords:** time series, differential equations, reconstruction, original system, standard system, method of perspective coefficients.

**Введение.** Во многих областях современной науки актуальна задача идентификации системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по временному ряду одной наблюдаемой переменной – задача реконструкции [8, 7]. Если правые части системы ОДУ представляют собой полиномы, то решение такой задачи только численными методами [6] позволяет получить модель, содержащую, как правило, избыточные слагаемые и не отражающую физику процесса. Если необходимо не только

воспроизвести временной ряд, но и получить систему ОДУ, имеющую физический смысл, то целесообразно использовать сочетание численных и аналитических методов реконструкции, например, предложенное в [12, 11] и развитое в [14, 15, 9, 10]. Кроме того, в качестве самостоятельной задачи можно выделить выбор структуры системы ОДУ – какие именно слагаемые, выбранные из фиксированного множества, должны входить в уравнения системы [3, 4, 5]. Предварительный выбор структуры системы позволяет повысить точность реконструкции. Так как по одной наблюдаемой переменной невозможно однозначно реконструировать систему ОДУ [16], то в некоторых задачах может быть необходимо найти все системы-кандидаты [2], способные воспроизвести исследуемый временной ряд.

**Постановка задачи.** Необходимо найти системы ОДУ, способные воспроизвести временной ряд переменной  $x_1(t)$  системы Лоренца [17], которая имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + a_2x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_6x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = c_3x_3 + c_5x_1x_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_1 = -10$ ,  $a_2 = 10$ ,  $b_1 = 28$ ,  $b_2 = b_6 = -1$ ,  $c_3 = -8/3$ ,  $c_5 = 1$ . Поскольку в данном исследовании рассматривается только временной ряд наблюдаемой, и нет дополнительных требований к системам-кандидатам, то будем искать только системы ОДУ, имеющие наименьшее количество слагаемых в уравнениях. Будем искать системы-кандидаты среди частных случаев системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1x_3 + a_7x_2^2 + a_8x_2x_3 + a_9x_3^2, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_7x_2^2 + b_8x_2x_3 + b_9x_3^2, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1^2 + c_5x_1x_2 + c_6x_1x_3 + c_7x_2^2 + c_8x_2x_3 + c_9x_3^2. \end{cases} \quad (2)$$

**Метод решения.** Для решения поставленной задачи будем использовать сочетание аналитических и численных методов, предложенное в [12, 11]. Назовем оригинальной системой (ОС) систему ОДУ, которая точно описывает динамику исследуемого процесса. ОС соответствует стандартная система (СС), которая имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \vdots \\ \dot{y}_n = F(y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (3)$$

где  $n$  - количество переменных ОС и СС;  $F$  - полиномиальная или дробно рациональная функция;  $y_1$  - наблюдаемая переменная СС, которая совпадает с наблюдаемой переменной ОС, т.е.  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ . При этом все коэффициенты СС могут быть аналитически выражены через коэффициенты ОС. Кроме

того, существует численный метод [12], позволяющий по временному ряду определить коэффициенты СС.

Для поиска только простейших ОС можно использовать метод перспективных коэффициентов [10], который состоит в следующем. Вначале по временному ряду численным методом реконструируется СС. Затем, используя аналитические соотношения, по структуре СС определяется, какие коэффициенты ОС строго равны нулю и строго не равны нулю и формируется исходная система (ИС), включающая только строго ненулевые коэффициенты. Далее ИС дополняется коэффициентами ОС, пока соответствующая СС не будет совпадать с СС, полученной численным методом. В результате будут получены одна или несколько ОС.

Учитывая выше изложенное, для решения задачи реконструкции системы Лоренца (1) была сформирована следующая последовательность действий:

1. Вывести соотношения, связывающие коэффициенты ОС и СС.
2. Реконструировать СС, соответствующую системе Лоренца (1).
3. Используя аналитические соотношения, определить, какие коэффициенты ОС должны быть строго нулевыми, а какие - строго ненулевыми.
4. Используя метод перспективных коэффициентов, найти все простейшие ОС, которым соответствует СС, полученная в п. 2.
5. Определить значения коэффициентов найденных ОС, если это возможно.

**Результаты.** Был выполнен вывод соотношений, связывающих коэффициенты ОС и СС. Для удобства использования соотношений необходимо, чтобы в них отсутствовали иррациональные слагаемые. Поэтому из уравнений ОС (2) были исключены произведения ненаблюдаемых переменных, которые приводят к появлению таких слагаемых в соотношениях. В результате система приняла вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1^2 + c_5x_1x_2 + c_6x_1x_3. \end{cases} \quad (4)$$

СС, соответствующая ОС (4), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = (N_0 + N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_1^2 + N_5y_1y_2 + N_6y_1y_3 + N_7y_2^2 + N_8y_2y_3 + \\ + N_9y_3^2 + N_{10}y_1^3 + N_{11}y_1^2y_2 + N_{12}y_1^2y_3 + N_{13}y_1y_2^2 + N_{14}y_1y_2y_3 + N_{16}y_2^3 + \\ + N_{20}y_1^4 + N_{21}y_1^3y_2 + N_{22}y_1^2y_3 + N_{23}y_1^2y_2^2 + N_{24}y_1^2y_2y_3 + N_{26}y_1y_2^3 + \\ + N_{31}y_1^5 + N_{32}y_1^4y_2 + N_{33}y_1^4y_3 + N_{34}y_1^6 + N_{35}y_1^3y_2^2 + N_{36}y_1^5y_2 + N_{38}y_1^7): \\ : (D_0 + D_1y_1 + D_2y_2 + D_4y_1^2 + D_{10}y_1^3). \end{cases} \quad (5)$$



Соотношения между коэффициентами ОС (4) и СС (5) в данной статье не приведены по причине их значительного объема. Нумерация коэффициентов СС такая же, как в (9) из [1].

Для системы (1) методы реконструкции и значения коэффициентов СС известны из [13]. Используя подход из указанной работы, для (1) была получена СС, которая с учетом обозначений (5) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = (N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + N_{20} y_1^4 + N_{21} y_1^3 y_2) / D_1 y_1, \end{cases} \quad (6)$$

где  $N_4 = 720$ ,  $N_5 = -29,33$ ,  $N_6 = -13,67$ ,  $N_7 = 11$ ,  $N_8 = D_1 = 1$ ,  $N_{20} = -10$ ,  $N_{21} = -1$  и  $y_1(t) \equiv x_1(t)$ .

Можно видеть, что СС (6) значительно проще, чем (5). Это означает, что ОС (4) содержит избыточные коэффициенты, которые необходимо приравнять нулю. Для определения того, какие коэффициенты ОС (4) равны нулю, был выполнен анализ, аналогичный рассмотренному в [1]. Зная, что некоторый коэффициент СС (6) нулевой (или ненулевой) и используя соотношения между коэффициентами ОС и СС, можно сделать вывод о наличии или отсутствии коэффициентов ОС. Многократное повторение данной операции для разных коэффициентов СС позволяет упростить структуру ОС. Последовательность основных этапов анализа для краткости представлена в виде диаграммы (рис. 1), обозначения которой имеют следующий смысл:

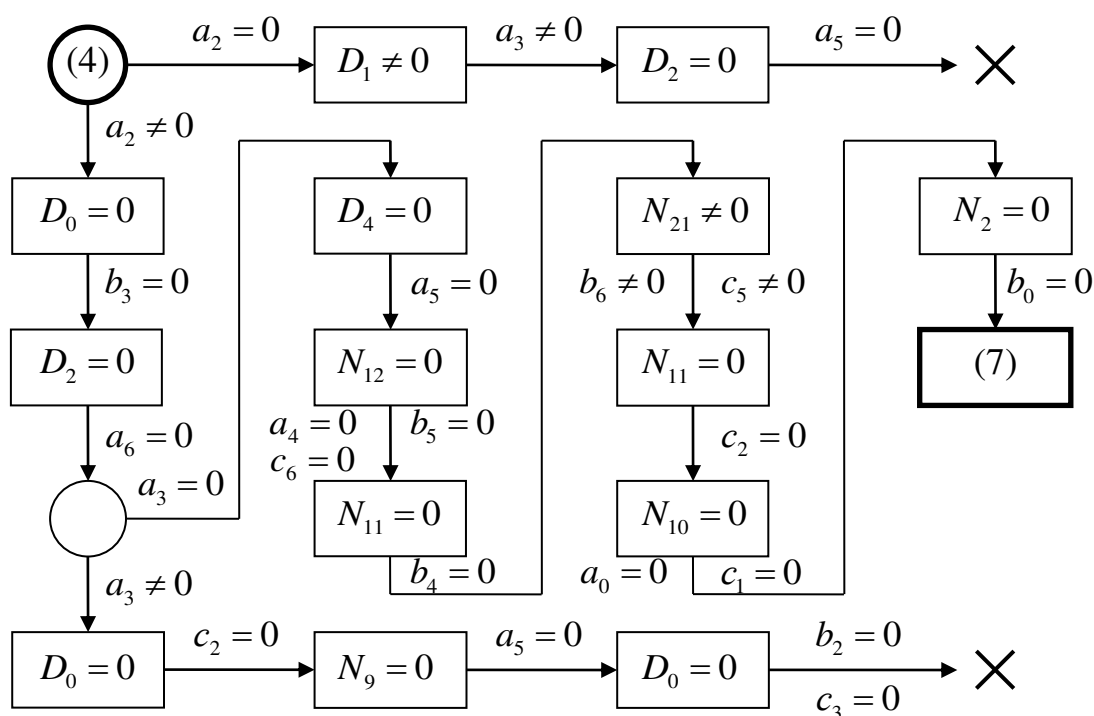


Рис. 1. Поиск частных случаев ОС (4), которым соответствует СС (6)

1. В прямоугольниках приведены исходные данные для очередного шага анализа – факты равенства или неравенства нулю соответствующего коэффициента СС. Сделанный на их основе вывод относительно коэффициентов ОС указан возле стрелок.

2. Круги обозначают рассмотрение взаимно исключающих гипотез, которое используется когда имеющихся фактов недостаточно для однозначного вывода.

3. Символ «X» означает, что предыдущие шаги анализа привели к противоречиям, делающим невозможным аналитический переход между ОС и СС.

Из рис. 1 можно видеть, что была найдена только одна ОС, которая является частным случаем (4) и которой соответствует СС (6). Система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_6 x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_5 x_1 x_2. \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что в системе (7) отсутствуют коэффициенты системы (4), которые согласно рис. 1 равны нулю, и точно присутствуют коэффициенты  $a_2$ ,  $b_6$ ,  $c_5$ , которые, согласно диаграмме, не равны нулю. Остальные коэффициенты системы (7) могут принимать как нулевые, так и ненулевые значения. Связь между коэффициентами ОС (7) и СС (6) выражается соотношениями

$$\begin{cases} N_4 = a_2 b_6 c_0 - a_2 b_1 c_3 + a_1 b_2 c_3, \\ N_5 = -(a_1 + b_2) c_3, \\ N_6 = a_1 + b_2 + c_3, \\ N_7 = -(a_1 + b_2), \\ N_8 = D_1 = 1, \\ N_{20} = a_2 b_6 c_4 - a_1 b_6 c_5, \\ N_{21} = b_6 c_5. \end{cases} \quad (8)$$

Можно видеть, что система (7) содержит 9 ненулевых коэффициентов, что больше, чем 7 коэффициентов в системе Лоренца (1). Для дальнейшего упрощения системы (7) с использованием соотношений (8) был применен метод перспективных коэффициентов [10]. Вначале была сформирована ИС, содержащая только ненулевые коэффициенты  $a_2$ ,  $b_6$ ,  $c_5$ . Ей соответствует СС с ненулевыми коэффициентами  $N_8$ ,  $N_{21}$ ,  $D_1$ , а  $N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = N_{20} = 0$ , что противоречит (6). Для устранения этого противоречия необходимо добавлять в ИС отсутствующие в ней коэффициенты ОС (7) до тех пор, пока соответствующая СС не будет совпадать с (6). Всего было найдено 9 ОС, в том числе 3 системы с 6 коэффициентами и 6 систем с 7 коэффициентами. Структуры найденных ОС

приведены в табл. 1, где символом "+" обозначено, какие из коэффициентов системы (7) присутствуют в уравнениях.

Далее было выполнено определение коэффициентов ОС из коэффициентов СС (6). При этом оказалось, что для ОС №1-4 не существуют значений коэффициентов, обеспечивающих значения коэффициентов СС (6). Например, для ОС №1, из (8) можно вывести соотношения  $a_1 = -N_{20}/N_{21}$  и  $a_1 = -N_7$ , которые становятся противоречивыми при подстановке значений коэффициентов СС (6). Такие ОС были исключены из дальнейшего рассмотрения. В результате оказалось, что стандартная система (6) соответствует оригинальным системам №5-9 из табл. 1, среди которых есть и система Лоренца (№7). Очевидно, все они способны воспроизвести исследуемый временной ряд. Несмотря на то, что по одной наблюдаемой переменной невозможно определить все коэффициенты ОС, для каждой из 5 найденных ОС можно однозначно определить значения части коэффициентов, используя значения коэффициентов СС (6). Например, значение коэффициента  $c_3$  можно однозначно определить, если вывести из (8) соотношение  $c_3 = N_5/N_7$ .

Найденные значения коэффициентов ОС №5-9 приведены в табл. 2. Для того чтобы была возможность вычислить все коэффициенты ОС, были приняты значения  $a_2 = b_6 = 1$ . При вычислении коэффициентов ОС №9 было необходимо решить квадратное уравнение, из-за чего данной ОС соответствует два набора коэффициентов (№9А и №9Б). Жирным шрифтом выделены коэффициенты, которые можно однозначно определить.

Таблица 1

Структуры ОС, которым соответствует СС (6)

№	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$b_6$	$c_0$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
1	+	+			+	+	+		+
2	+	+	+		+		+		+
3	+	+		+	+		+		+
4	+	+	+		+	+	+		+
5	+	+		+	+	+	+		+
6	+	+			+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+		+		+
8	+	+	+		+		+	+	+
9	+	+		+	+		+	+	+

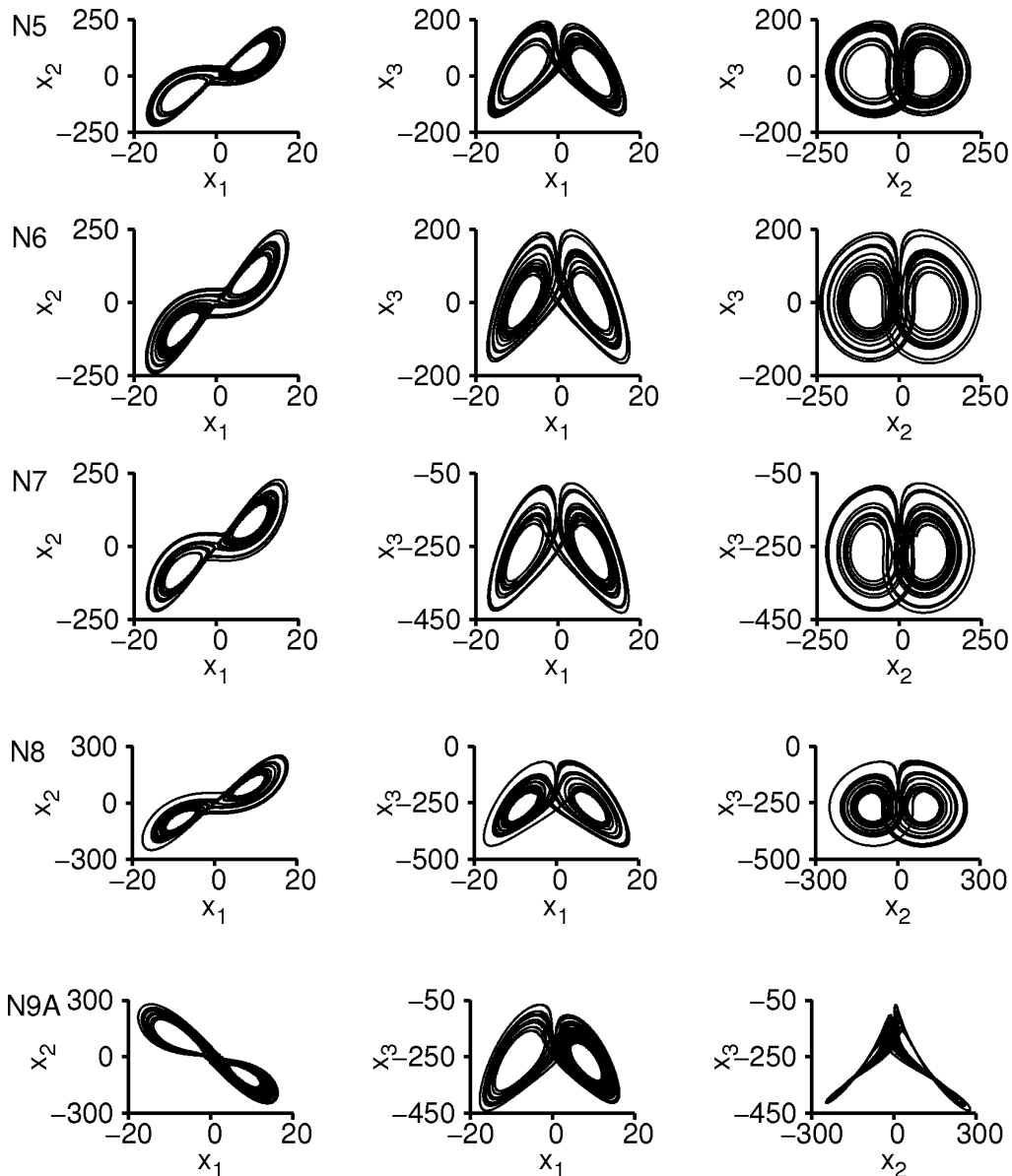
При подстановке значений коэффициентов ОС из табл. 2 в выражения (8) полученные коэффициенты СС будут такими же, как в (6). Следовательно, наблюдаемые переменные всех найденных ОС совпадают с наблюдаемой переменной системы Лоренца (1). Значения некоторых коэффициентов ОС будут зависеть от ранее принятых значений  $a_2$ ,  $b_6$ . Если присвоить  $a_2$  и  $b_6$  произвольные ненулевые значения, то зависящие от них коэффициенты ОС

ізменяться так, що коефіцієнти СС і наблюдаемая остануться незмінними. Прикладом такої ситуації являється система №7, структура якої збігається зі структурою системи Лоренца (1), але значення коефіцієнтів відрізняються. Фазові портрети ОС №5-9, побудовані за використання значень коефіцієнтів з табл. 2, показані на рис. 2.

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів ОС №5-9

№	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$b_6$	$c_0$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
5	-10	1	0	-1	1	746,67	-2,67	0	-1
6	-11	1	0	0	1	720	-2,67	1	-1
7	-10	1	280	-1	1	0	-2,67	0	-1
8	-11	1	270	0	1	0	-2,67	1	-1
9А	11,828	1	0	-22,828	1	0	-2,67	-21,828	-1
9Б	-22,828	1	0	11,828	1	0	-2,67	12,828	-1



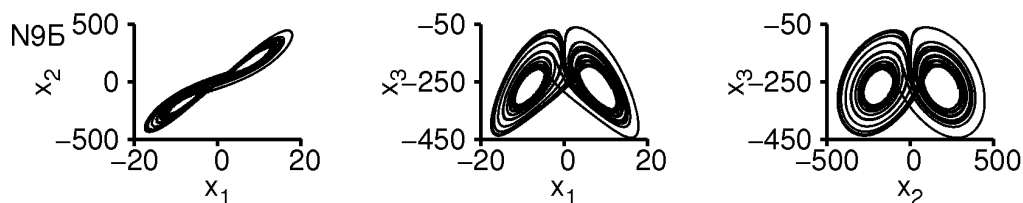


Рис. 2. Фазовые портреты ОС №5-9

**Выводы.** В статье выполнена реконструкция системы ОДУ Лоренца по одной наблюдаемой переменной с использованием метода перспективных коэффициентов. Были найдены 4 системы ОДУ, которые отличаются по структуре от системы Лоренца, но способны воспроизвести временной ряд одной из переменных системы Лоренца. Поиск систем ОДУ с одинаковыми наблюдаемыми переменными и различной структурой важен с практической точки зрения, поскольку таким системам могут соответствовать разные механизмы протекания исследуемого процесса.

Аналитический переход между ОС и СС возможен не для всех систем ОДУ, что создавало определенные трудности в данной работе. Поэтому дальнейшего исследования требуют вопросы выявления ОС, для которых возможен переход к СС, и вывод для них соответствующих аналитических соотношений.

#### Библиографические ссылки

1. **Городецкий В. Г.** Альтернативные модели для систем одного класса [Текст] / В. Г. Городецкий, Н. П. Осадчук // Питання прикладної математики та математичного моделювання: зб. наук. пр. – Д.: ЛІРА, 2017. – Вип. 17. – С. 62-72.
2. **Льюнг Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя [Текст] / Л. Льюнг. – М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1991. – 432 с. – Перевод с английского.
3. **Aguirre L. A.** Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering [Text] / L. A. Aguirre, S. A. Billings // Int. J. Control. – 1995. – vol. 62. – № 3. – P. 569-587.
4. **Aguirre L. A.** Structure-selection techniques applied to continuous-time nonlinear models [Text] / L. A. Aguirre, U. S. Freitas, C. Letellier, J. Maquet // Physica D. – 2001. – vol. 158. – P. 1-18.
5. **Billings S. A.** Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator [Text] / S. A. Billings, S. Chen, M. J. Korenberg // Int. J. Control. – 1989. – vol. 49. – № 6. – P. 2157-2189.
6. **Baake E.** Fitting ordinary differential equations to chaotic data [Text] / E. Baake, M. Baake, H.G. Bock, K.M. Briggs // Phys. Rev. A. – 1992. – vol. 45. – № 8. – P. 5524-5529.
7. **Breeden J. L.** Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables [Text] / J. L. Breeden, A. Hubler // Phys. Rev. A. – 1990. – vol. 42. – P. 5817-5826.
8. **Cremers J.** Construction of differential equations from experimental data [Text] / J. Cremers, A. Hubler // Naturforsch. – 1987. – vol. 42a. – P. 797-802.
9. **Gorodetskyi V.** Analytic reconstruction of some dynamical systems [Text] / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // Physics Letters A. – 2013. – vol. 377. – P. 703-713.
10. **Gorodetskyi V.** Reconstruction of chaotic systems of a certain class [Text] / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // International Journal of Dynamics and Control. – 2015. – vol. 3. – № 4. – P. 341-353.

11. **Gouesbet G.** Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system [Text] / G. Gouesbet // Phys. Rev. A. – 1991. – vol. 44. – P. 6264-6280.
12. **Gouesbet G.** Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series [Text] / G. Gouesbet // Physical Review A. – 1991. – vol. 43. – № 10. – P. 5321-5331.
13. **Gouesbet G.** Reconstruction of vector fields: the case of Lorentz system [Text] / G. Gouesbet // Physical Review A. – 1992. – vol. 46. – № 4. – P. 1784-1796.
14. **Lainscsek C.** Ansatz library for global modeling with a structure selection [Text] / C. Lainscsek, C. Letellier, F. Schürer // Physical Review E. – 2001. – vol. 64. – 016206. – 15 p.
15. **Lainscsek C.** Global modeling of the Rössler system from the z-variable [Text] / C. Lainscsek, C. Letellier, I. Gorodnitsky // Physics letter A. – 2003. – vol. 314. – P. 409-427.
16. **Lainscsek C.** Nonuniqueness of global modeling and time scaling [Text] / C. Lainscsek // Phys. Rev. E. – 2011. – vol. 84. – 046205.
17. **Lorenz E. N.** Deterministic nonperiodic flow [Text] / E. N. Lorenz // J. Atmos. Sci. – 1963. – vol. 20. – P. 130-141.

*Надійшла до редколегії 18.04.2018.*

**Н.А. Гук, М.К. Гук, І.П. Шаповал**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **НАЛАШТУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТОПОЛОГІЇ СЕНСОРНОЇ МЕРЕЖІ**

Задача проектування топології бездротової сенсорної мережі оптимальної топології розглядається як задача покриття. Сформульовано цільову функцію, яка враховує додаткові обмеження, що забезпечують стійкість роботи мережі. Для розв'язання задачі проектування топології мережі використано генетичний алгоритм. У результаті обчислювального експерименту встановлено оптимальний розмір популяції, обрано методи виконання генетичних операцій.

**Ключові слова:** моніторинг, бездротова сенсорна мережа, сенсор, роутер, сервер, топологія, задача покриття, генетичний алгоритм.

Задача проектирования топологии беспроводной сенсорной сети оптимальной топологии рассматривается как задача покрытия. Сформулирована целевая функция, которая учитывает дополнительные ограничения, обеспечивающие устойчивость работы сети. Для решения задачи проектирования топологии сети использован генетический алгоритм. В результате вычислительного эксперимента установлен оптимальный размер популяции, выбраны методы выполнения генетических операций.

**Ключевые слова:** мониторинг, беспроводная сенсорная сеть, сенсор, роутер, сервер, топология, задача покрытия, генетический алгоритм.

The paper is devoted to the optimal placement of devices within a wireless sensor network. Modern requirements to ensure public safety in buildings with a complex structure imply the existence of systems that can detect and position emergency situation, inform rescue and tenants about the status and help them to either evacuate or eliminate the danger. Nowadays the main approach to create indoor emergency system is based on wireless sensor network. The network is built with a big number of usually battery-operating devices, each consists of a sensors set for hazard detection, and radio frequency module for communication. To evaluate the state of indoor environment different sensors can be used, such as temperature, humidity, light, flame, smoke, gas, etc. The problem of optimizing the network topology as a covering problem is formulated. A set of points in the area that is not covered by circles, a set of points belonging to the region and the intersection of two or more circles of coverage, set of points that do not belong to the area need to be minimized. To ensure fault tolerance of the wireless sensor network, it is necessary to allow the connection of each sensor with at least two routers, in case one of the routers is accidentally switched off, and also it is necessary to ensure connection of the router with at least one router. To take into account these additional conditions, the method of penalty functions is used. The genetic algorithm for solving the problem is used. The main genetic operators are adapted to the problem of designing the topology of wireless sensor networks. A computational experiment was carried out, during which the optimal population size was established; the procedure of homogeneous crossing, procedure of tournament selection is

**chosen; procedure of homogeneous mutation. As a criterion for stopping the genetic algorithm, the stagnation of the results on the iterations of the algorithm is chosen.**

**Keywords: monitoring, wireless sensor network, sensor, router, server, topology, coverage problem, genetic algorithm.**

**Вступ.** Сучасний підхід до створення внутрішньої аварійної системи у будівлях зі складною структурою базується на побудові бездротової сенсорної мережі (БСМ). БСМ – це розподілена система необслуговуваних мініатюрних електронних пристроїв, які здійснюють збір даних про параметри зовнішнього середовища і передачу їх на сервер за допомогою ретрансляції від вузла до вузла засобами бездротового зв'язку. Автономні пристрої оздоблені датчиками для виявлення небезпеки (задимлення, пожежі). На підставі даних сигналів можливо автоматизувати управління системою протидії небезпеці та системою сповіщення при виникненні вогненебезпечних і інших аварійних ситуацій. Таким чином здійснюється інформування відповідних служб о надзвичайної ситуації для подальшого усунення проблеми. Крім того, такі системи можна використовувати для моніторингу та контролю параметрів повітряного середовища у приміщеннях, організації системи комфортної навігації для відвідувачів будівель.

Тому питання проектування архітектури й топології бездротової сенсорної мережі, що забезпечує оптимальне розташування елементів мережі і гарантує стійку роботу системи, є актуальними.

**Аналіз літературних джерел.** З аналізу літературних джерел з'ясовано, що задачу проектування топології мережі може бути розв'язано як задачу теорії графів [1], як задачу однокритеріальної (багатокритеріальної) оптимізації [2], як задачу теорії алгоритмів – як задачу розміщення [3], або як задачу покриття [4].

З аналізу літературних джерел випливає, що аналітичні моделі й методи розв'язання мають обмежену область застосування та певні недоліки, які не дозволяють використовувати їх для розв'язання практичних задач. Крім того, використання класичних методів оптимізації можливе лише для розрахунків топології мереж малої вимірності через значні труднощі обчислювального характеру. Переважна більшість робіт, що мають відношення до задач кругового покриття, присвячена дослідженню евристичних методів розв'язання таких задач. Сучасні обчислювальні технології, такі як генетичний алгоритм, метод мурашиних колоній, можуть застосовуватися для розв'язання задач оптимального проектування сенсорної мережі. Однак сформульовані в літературі цільові функціонали не враховують усіх вимог, які висуваються до бездротових сенсорних мереж на практиці.

У даній роботі пропонується застосовувати генетичний алгоритм для розв'язання задачі проектування топології бездротової сенсорної мережі, яка здатна забезпечити оптимальне покриття заданої області, при цьому в автоматичному режимі здійснюється розподіл ролей пристроїв (сенсор,



роутер, сервер) між вузлами мережі. Сенсори здійснюють збір даних про параметри зовнішнього середовища (температуру, тиск, задимлення, рівень вологості) та передачу їх на сервер. Роутери здійснюють прийняття інформації від сенсорів мережі з метою її ретрансляції до сервера, а також передачу даних від сервера на сенсори. Керування всіма вузлами мережі, а також прийняття рішень у випадку нестандартної ситуації здійснюється сервером. Побудована конфігурація повинна забезпечувати зв'язаність вузлів мережі та стійкість мережі, тобто можливість передачі інформації навіть у випадку відмови окремих сенсорів та роутерів.

**Математична модель задачі.** У роботі задачу побудови оптимальної топології мережі сформульовано як задачу покриття із застосуванням результатів досліджень О. М. Кісельової та її учнів [5].

Оскільки для визначення зони дії пристроїв мережі використовується логарифмічно-нормальна модель поширення радіосигналу, то область покриття сенсора або роутера можна вважати колом. Тому розглядається задача кругового покриття.

На області  $\Omega$  необхідно розташувати центри кіл так, щоб

$$\text{mes} \left( \Omega \cap \left[ \left( \bigcup_{p=1}^{N_1} B(X_p, r_1^{(p)}) \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{N_2} B(X_k, r_2^{(k)}) \right) \right] \right) \Rightarrow \max,$$

де  $\{X_k, X_p\}$  – сукупність центрів кіл, які утворюють покриття множини  $\Omega$  колами  $B(X_p, r_1^{(p)})$ ,  $B(X_k, r_2^{(k)})$  радіусів  $r_1^{(p)}$ ,  $r_2^{(k)}$ , де  $r_1^{(p)}$  – радіус покриття  $p$ -ого роутера,  $r_2^{(k)}$  – радіус покриття  $k$ -ого сенсора,  $X_p$  – точки розміщення роутерів, тоді вектор  $X_p = (x_p, y_p)$  – вектор параметрів розміщення кола в покритті, який утворюється  $p$ -им роутером,  $X_k$  – точки розміщення сенсорів, тоді  $X_k = (x_k, y_k)$  – вектор параметрів розміщення кола в покритті, який утворюється  $k$ -им сенсором;  $p = \overline{1, N_1}$ ,  $k = \overline{1, N_2}$ ;  $N_1$  – загальне число роутерів,  $N_2$  – загальне число сенсорів. У якості сервера обирається один з роутерів.

У роботі для визначення відстані між точками області прийнята евклідова метрика.

Для побудови оптимального покриття необхідно мінімізувати множину точок області  $\Omega$ , яку не покрито колами; множину точок, що належать області та перетину двох і більше кіл покриття; множину точок, які належать хоча б одному з кіл покриття, але не належать області  $\Omega$ .

Тоді цільовий функціонал задачі може бути сформульований у вигляді:

$$Q(X_p, X_k) = \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{p=1}^{N_1} \int_{\Omega_p^{(i)}} |c(X, X_p) - r_1^{(p)}| d\Omega + \sum_{k=1}^{N_2} \int_{\Omega_k^{(i)}} |c(X, X_k) - r_2^{(k)}| d\Omega \right]. \quad (1)$$

Для забезпечення відмовостійкості бездротової сенсорної мережі необхідно передбачити можливість з'єднання кожного сенсору не менше ніж з двома роутерами, на той випадок, коли один з роутерів буде аварійно вимкнений, а також необхідно забезпечити з'єднання роутера хоча б ще з одним роутером [6]. Для врахування вказаних додаткових умов будемо використовувати метод штрафних функцій. Приєднаємо штрафну функцію до функціоналу (1) у такий спосіб:

$$\bar{Q}(X_p, X_k, \alpha) = Q(X_p, X_k) + \alpha \left( \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{r_1^{(p)} - c(X_k, X_{pj})} + \sum_{p=1}^{N_1} \frac{1}{r_1^{(p)} - c(X_p, X_{pi})} \right), \quad (2)$$

де  $\alpha$  – додатна величина.

**Метод розв'язання задачі.** У якості методу розв'язання сформульованої задачі оптимізації (2) будемо використовувати генетичний алгоритм. Задачу розв'язано для області  $\Omega$ , яка являє собою план поверху будинку.

Область покривається рівномірною сіткою, яка складається з вузлів  $X_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Вузли сітки є точками розміщення пристроїв (роутерів, сенсорів). Кодування інформації про розміщення пристрою у вузлі сітки виконується у такий спосіб: 00 – пристрій (роутер або сенсор) у вузлі не розміщено; 01 – у вузлі розміщений сенсор; 10 – у вузлі розміщений сенсор; 11 – у вузлі розміщений роутер. Для генерації популяції будемо використовувати різні варіанти розміщення сенсорів у вузлах сітки. Набір хромосом для популяції генерується випадковим чином.

Згенеровані у такий спосіб хромосоми (варіанти топології мережі) оцінюються з точки зору цільової функції задачі. На кожній ітерації генетичного алгоритму виконуються операції селекції та мутації, кращий розв'язок з поточної популяції використовується для формування нової популяції, після чого цикл (генерація) повторюється. Розв'язком задачі є вектор, який складається з номерів вузлів сітки, у яких розміщуються сенсори та роутери.

Генетичний алгоритм реалізовано у вигляді програми. Також розроблено модуль допоміжних геометричних функцій для визначення геометричного місця точок області й зіставлення їх місцерозташування із границями області.

За допомогою програмного забезпечення обрано методи виконання генетичних операцій та проведено налаштування параметрів алгоритму.

**Характеристика параметрів моделі та параметрів аналізу.** Параметри радіо-моделі обирались такими: площа покриття роутера дорівнювала 450 м<sup>2</sup>, площа покриття сенсора дорівнювала 40 м<sup>2</sup>. Для початкової популяції роутери розташовуються у вузлах сітки з ймовірністю 1,44% , сенсори – з ймовірністю 21,12%, цільові значення цих параметрів для обраних характеристик пристроїв та площі поверху будівлі становлять – 0,38% та 4,9% , відповідно.

Генетичний алгоритм виконує певну кількість ітерацій, на кожній ітерації обчислюється значення цільової функції для кожної хромосоми у популяції, якість розрахунку обчислюється за значенням цільової функції для кращої

хромосоми. Аналізується поведінка цільової функції на ітераціях генетичного алгоритму. Для порівняння застосованих у алгоритмі методів мутації, селекції та схрещування крім значень цільової функції, обчислюється також значення похибки за кількістю використаних пристроїв (роутерів, сенсорів). Для цього обчислюється відношення різниці між використаною кількістю пристроїв та заданою цільовою кількістю. Якщо похибка за кількістю використаних пристроїв дорівнює нулю, то в результаті роботи алгоритму обрано достатню кількість пристроїв, якщо похибка від'ємна, то кількість пристроїв недостатня, інакше, використано пристроїв більше, ніж дозволене.

Для оцінювання якості популяції та застосованих у алгоритмі методів мутації та селекції досліджується різниця між значеннями цільової функції для кращої та поганої хромосоми, за допомогою цього параметру відстежується виродження популяції.

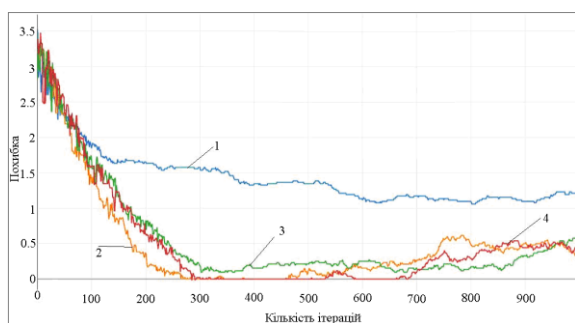
**Аналіз впливу параметрів алгоритму на результати розв'язання задачі.** Відомо, що кількість хромосом у популяції суттєво впливає на якість роботи генетичного алгоритму. Тестування відбувалось для популяцій вимірності яких дорівнювала 50, 100, 200 і 500 хромосомам. Збільшення вимірності популяції до 1000 хромосом не є доцільним, оскільки зі збільшенням вимірності відбувається більш скоріше виродження популяції (хромосоми стають близькими одна до одної), крім того значно збільшується час, необхідний для проведення розрахунків.

На рис. 1 наведено значення похибки за кількістю використаних сенсорів на ітераціях генетичного алгоритму для різних розмірів популяції. З аналізу наведених залежностей видно, що використання 50 хромосом (крива 1) у популяції недостатньо, зі збільшенням розміру популяції функція похибки за кількістю використаних пристроїв зменшує своє значення (криві 2, 3 відповідають результатам, отриманим з використанням 100, 200 хромосом). Встановлено, що для розглянутої задачі існує оптимальний розмір популяції – 500 хромосом (крива 4), для якого при виконанні 300-400 ітерацій генетичного алгоритму досягається мінімум функції похибки за кількістю використаних пристроїв.

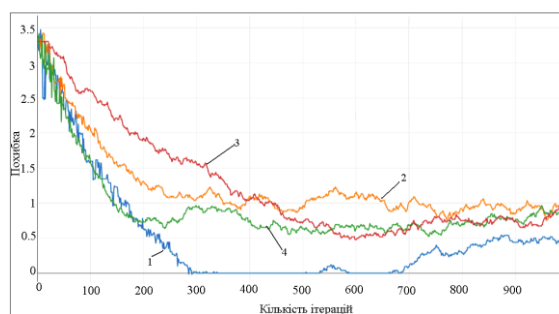
Ефективність роботи будь-якого генетичного алгоритму суттєво залежить від ефективності операції схрещування. У програмі реалізовано одноточкове схрещування; двохточкове схрещування, при якому схрещування відбувається між двома випадково обраними хромосомами популяції; схрещування трьох випадково обраних батьків, при якому біт першого батька порівнюється із відповідним бітом другого батька, якщо вони схожі, то використовуються при формуванні потомка, інакше використовується відповідний біт третього батька; однорідне схрещування, коли значення кожного біта в хромосомі потомка визначається випадковим чином із відповідних бітів батьків.

На рис. 2 наведено залежність значення похибки за кількістю використаних сенсорів, відповідно, на ітераціях генетичного алгоритму для

різних типів схрещування (крива 1 відповідає однорідному схрещуванню, 2 – односточковому схрещуванню, 3 – схрещуванню трьох випадково обраних батьків, 4 – двохточковому схрещуванню.)



**Рис. 1. – Похибка за кількістю використаних сенсорів для різних розмірів популяції**



**Рис.2 – Похибка за кількістю використаних сенсорів для різних методів схрещування**

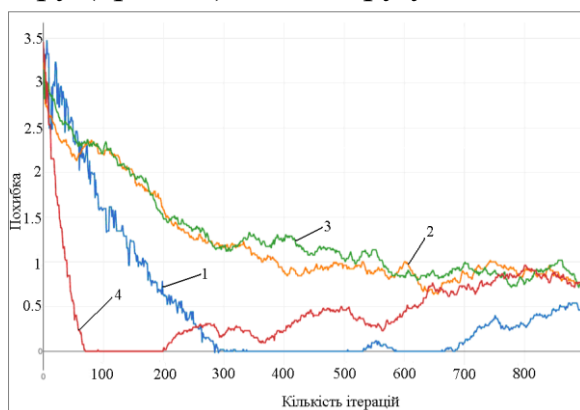
З аналізу наведених залежностей видно, що лише із використанням однорідного схрещування вдається досягти нульових значень похибки за кількістю використаних пристроїв. З використанням такого типу схрещування потомки у популяції отримують найбільшу кількість функціональних ознак, які були присутні у наборах батьків.

Процедура селекції дозволяє відібрати хромосоми у популяції, які будуть приймати участь у схрещуванні. Процедури відбору надають перевагу хромосомам, для яких цільова функція набуває найбільших значень. З аналізу наведених залежностей рис. 3 можна бачити, що використання рулеточного відбору (для обох його модифікацій) (криві 2, 3) недоцільно при розв'язанні сформульованої задачі. Значення цільової функції на ітераціях генетичного алгоритму, отримані при використанні рулеточного відбору, не наближаються до нульового значення протягом виконання ітерацій генетичного алгоритму. В той час, як використання турнірного відбору (крива 1) та відбору усіканням (крива 4) дозволяє отримати нульові значення зазначеної функції.

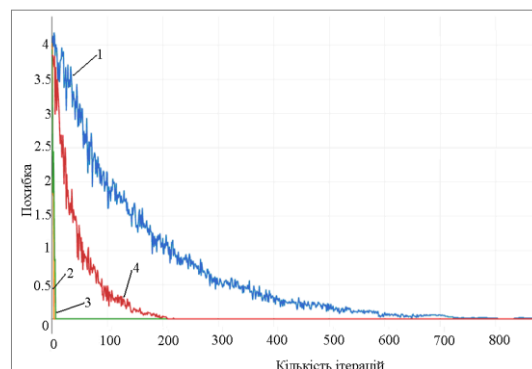
При використанні відбору усіканням спостерігається виродження популяції приблизно на 150-200 ітерації генетичного алгоритму, в той час, як розв'язок задачі ще не отримано. При використанні турнірного відбору виродження спостерігається приблизно при виконанні 550-600 ітерацій генетичного алгоритму.

На рис. 4 наведено залежність різниці між значеннями цільової функції для кращої та гіршої хромосоми на ітераціях генетичного алгоритму, отриманих з використанням різних методів селекції. Наближення значень різниці до нуля свідчить про те, що хромосоми стають ближчими одна до одної, та популяція вироджується до моменту отримання оптимального розв'язку задачі покриття. З аналізу залежностей, зображених на рис. 4, можна бачити, що найбільш швидко відбувається виродження популяції при використанні обох модифікацій рулеточного відбору (криві 2 та 3 ). Більш

повільне відновлення популяцій досягається при використанні турнірного відбору (крива 1) та відбору усіканням (крива 4).



**Рис. 3 – Похибка за кількістю використаних сенсорів для різних методів селекції**



**Рис. 4 – Різниця між значеннями цільової функції для кращої та гіршої хромосоми на ітераціях генетичного алгоритму**

Для визначення оптимальної кількості ітерацій, за яку буде отримано розв'язок задачі покриття, було проаналізовано залежності, зображені на рис. 1-4. Слід відзначити, що на всіх наведених графіках зі збільшенням кількості ітерацій генетичного алгоритму похибка суттєво змінюється до певного моменту, при подальшому збільшенні кількості ітерацій генетичного алгоритму у поведінці зазначених функцій не відбувається значного покращення, при цьому час виконання розрахунків з генетичним алгоритмом значно зростає. Тому при відсутності суттєвих змін у поведінці розв'язку задачі роботу генетичного алгоритму можна припинити.

За допомогою операції мутації створюються такі ланцюжки генів, які не входили в попереднє покоління. У той же час ця процедура може створювати даремні та «шкідливі» особи, наявність яких ускладнює пошук розв'язку. Тому вибір методу мутації та налаштування параметрів процедури, необхідно зробити так, щоб вона сприяла пошуку розв'язку.

У роботі ймовірність мутації у хромосомі популяції визначає інтенсивність мутацій та становить 1%. Оператор мутації, виконаний для хромосоми, може змінювати від 0 до 3 генів в хромосомі. Якщо відсоток ймовірності мутацій прийматиме велике значення, то хромосоми – потомки у популяції не успадковують ознаки батьків, а алгоритм не матиме змогу навчатися на основі спадкових ознак.

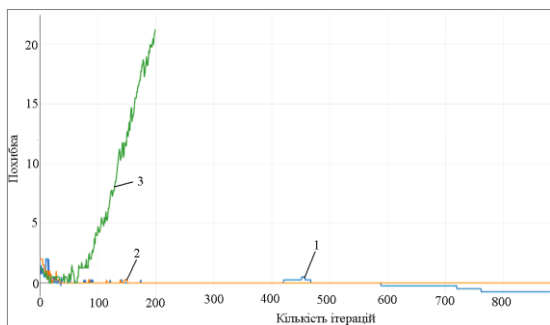
У роботі досліджується три види алгоритмів мутацій: інверсія гена (крива 3); інсерційна мутація (крива 2), при якій у послідовність бітів хромосоми відбувається вставка іншої послідовності; однорідна мутація (крива 1).

На рис. 5 та 6 наведено порівняння результатів, отриманих з використанням трьох різних методів мутації. З аналізу рисунків можна помітити, що інверсія гена (крива 3) не є корисною для розв'язання задачі при обраному способі кодування хромосоми у вигляді послідовності бітів.

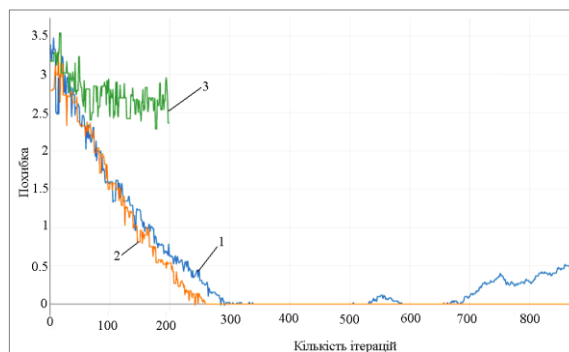
Ідея інверсії гену спирається на перемиканні бітів. У початкової популяції ми маємо близько 90% порожніх пунктів, які кодовані послідовностями,

складеними з двох нулів (00). Метод інверсії гену змінює їх на послідовності з двох одиниць (11), які визначають розташування роутеру з великою ймовірністю. За результатами виконання такої мутації кількість роутерів значно зростає (рис. 5, крива 3). Також цей вид мутації не змінює кількість пристроїв, які закодовані як 01 або 10 та визначають розташування сенсорів.

На рис. 6 значення похибки за кількістю використаних сенсорів на ітераціях генетичного алгоритму для інверсії гену не зменшується (крива 3).

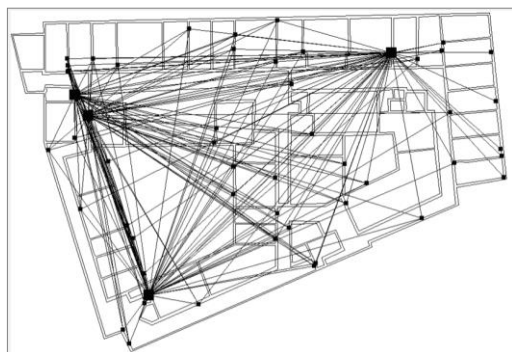


**Рис. 5 – Похибка за кількістю використаних роутерів для різних методів мутації**

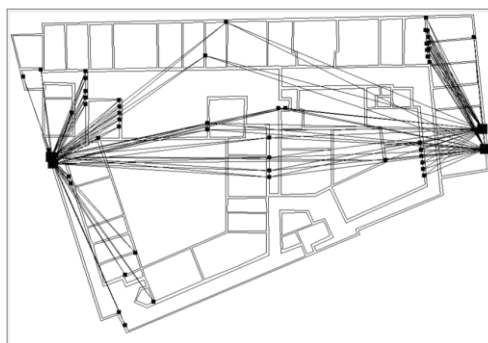


**Рис. 6 – Похибка за кількістю використаних сенсорів для різних методів мутації**

Порівняння результатів роботи алгоритму, отриманих з використанням інсерційної мутації (крива 2) та однорідної мутації (крива 3), свідчить, що вони мають приблизно однакову швидкість наближення до нульових значень похибки за кількістю використаних пристроїв. Але, оскільки при виконанні інсерційної мутації лише змінюється порядок генів без введення або видалення випадкових пристроїв, то це не призводить до значних змін у популяції, а лише дозволяє дотримуватися оптимального числа пристроїв і покращувати надійність покриття на ітераціях генетичного алгоритму (рис. 6). На рис. 7, 8 наведено декодовані результати роботи генетичного алгоритму у вигляді розташування пристроїв на плані поверху приміщення, які було отримано із використанням однорідної мутації та інсерційної мутації. Результат, отриманий з використанням інсерційної мутації (рис. 8), гірше, ніж той, який отримано із застосуванням однорідної мутації (рис. 7). При візуалізації результату на рис. 8 чотири роутери розташовані парами, на незначній відстані друг від друга.



**Рис. 7 – Декодований результат розв’язання задачі покриття із використанням однорідної мутації**



**Рис. 8 – Декодований результат розв’язання задачі покриття із використанням інсерційної мутації**

Це відбувається у зв'язку з тим, що метод інсерційної мутації об'єднує групи пристроїв для досягнення кращих показників стійкості мережі.

**Висновки.** Задачу проектування оптимальної топології бездротової сенсорної мережі сформульовано, як задачу покриття. У якості методу розв'язання обрано генетичний алгоритм. Виходячи з вигляду цільової функції задачі оптимізації сформульовано цільову функцію генетичного алгоритму. Основні генетичні оператори адаптовано до задачі проектування топології бездротових сенсорних мереж. Проведено обчислювальний експеримент, у ході виконання якого встановлено оптимальний розмір популяції; обрано процедуру однорідного схрещування, процедуру турнірного відбору; процедуру однорідної мутації. У якості критерію зупинення генетичного алгоритму обрано стагнацію результатів на ітераціях алгоритму.

#### Бібліографічні посилання

1. **Князев, Д.М.** Приложение теории графов к решению задачи топологических петель в сетях Ethernet [Текст] / Д.М. Князев, И.А. Грибанов // Сб. ст. по мат. XXXI междунар. студ. науч.-практ. конф. «Научное сообщество студентов XXI столетия. Технические науки». – 2015. – № 4(30). – С. 54–59.
2. **Тайк, А.М.** Применение алгоритма перебора для оптимизации топологии беспроводных сетей [Text] / А.М. Тайк, С.А. Лупин, Ю.Ф. Вагапов // International Journal of Open Information Technologies. – 2016. – №9. С. 80–87.
3. **Farahani, R.Z.** Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies [Text] / R.Z. Farahani, M. Hekmatfar. – Physica-Verlag, Heidelberg, Germany, 2009. – 549p.
4. **Sangwan, A.** Survey on coverage problems in wireless sensor networks [Text] / A. Sangwan, R.P. Singh // Wireless Personal Communications. – 2015. – Vol. 80, Iss. 4. – P. 1475–1500
5. **Киселева, Е.М.** Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств [Текст] / Е.М. Киселева, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98–117.
6. **Ободан, Н.І.** Оптимізація топології бездротової сенсорної мережі сповіщення [Текст] / Н.І. Ободан, М.К. Гук // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – зб. наук праць. – 2017. – Вип. 17. – С. 154-162.

Надійшла до редколегії 22.08.2018

**Д.І. Єгошкін, Н.А. Гук, С.Ф. Сірик**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **АЛГОРИТМ КЛАСИФІКАЦІЇ НА БАЗІ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ З РОЗШИРЮВАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ВИВОДІВ**

Розглядається задача автоматичної генерації бази знань, що складається з продукційних правил, для об'єктів навчальної вибірки з використанням методів нечіткої логіки і правила порівняння значень вихідних змінних. Пропонується алгоритм формування нечітких продукційних правил.

**Ключові слова:** штучний інтелект, нечітка логіка, відображення, класифікація, база знань, експертна система, мова C/C ++, мова JavaScript, JSON.

Рассматривается задача автоматической генерации базы знаний, состоящей из продукционных правил, для объектов обучающей выборки с использованием методов нечеткой логики и правила сравнения значений выходной переменной. Предлагается алгоритм формирования нечетких продукционных правил.

**Ключевые слова:** искусственный интеллект, нечеткая логика, отражение, классификация, база знаний, экспертная система, язык C / C ++, язык JavaScript, JSON.

In this article the problem of automatic generation of a knowledge base which consists of production rules for training dataset using fuzzy logic methods and a rule for comparing the values of an output variable is considered. An algorithm for the formation of fuzzy production rules is proposed. An actual problem of development and improvement of artificial intelligence algorithms and fuzzy logic application for solving a wider range of problems is considered. With the help of such systems are possible to eliminate the difficulties of formalizing knowledge about technological processes; also it is possible to organize recognition of nonstandard and emergency situations without using precise mathematical models and classical decision theory based on the tool of mathematical equations. The development of this area is relevant, as the number of tasks are constantly increasing, and the amount of knowledge becomes too large to handle them manually. The construction of an exact mathematical model for poorly formalized objects and processes are very difficult task, due to the lack of complete information. The situation becomes even more complicated if the properties of the object or process change dynamically. Therefore, the development of mathematical methods and algorithms that allow structuring the system of rules and determining the order of their calls to control consistency and completeness to optimize the number of rules, are an actual task.

Modern approaches to the automation of these processes are considered. These approaches significantly improve the work of expert systems, but they allow to work only with static knowledge bases, limit the number of logical inferences and are not applicable for cases when it is necessary to add new logical rules to the existing system. In this article, an approach is developed that makes it possible to expand the knowledge base of the expert system with new rules in the process of exploitation. The developed algorithm has following advantages: high speed of problem solving; the ability that allows expanding the number of system responses without changing the scope of the rules and the program itself; expanding the range of application of fuzzy logic algorithms.



The developed algorithm has following disadvantages: if the system's response database has objects that are similar to each other, they can have the same center of gravity, which in turn leads to additional checks; the minimum distance for mapping the object should be selected experimentally. The application of this algorithm can be seen on the website of the program, which classifies, maps an arbitrary user in a set of comic book characters database "CMD - Combat Marvel DC" [8]. The approach that was proposed has been successfully implemented using the C/C++ and JavaScript languages, and JSON open-standard file format that uses human-readable text to transmit data objects consisting of attribute-value pairs and array data types. Software that was used for development: NetBeans IDE, MinGW, GNU Compiler Collection, WhiteStarUML, GitHub, WebGL, Chrome, Mozilla Firefox, Opera.

**Keywords:** artificial neural network, error back-propagation method, anthropological points, oriented gradient histogram, convolutional neural network, prediction.

**Вступ.** Розвиток обчислювальних технологій і апаратної частини комп'ютера дозволив широко застосовувати експертні системи для підтримки прийняття рішень в таких галузях знань, як економіка, промисловість, медицина. Сформульовані бази знань і розроблені алгоритми логічного виведення дозволяють акумулювати великий обсяг знань, отриманих від експертів. За допомогою таких систем можна усувати труднощі формалізації знань про технологічні процеси, організувати розпізнавання нестандартних та аварійних ситуацій без використання точних математичних моделей, які базуються на апараті математичних рівнянь і класичної теорії прийняття рішень.

Побудова точної математичної моделі для погано формалізованих об'єктів і процесів є досить складною задачею у зв'язку з відсутністю повної інформації. Ситуація ще більше ускладнюється, якщо властивості об'єкта або процесу змінюються динамічно. Крім того, знання є такою структурою, що постійно змінюється і розвивається, а це в свою чергу може призвести до необхідності повної переробки математичної моделі.

Слід зазначити, що якість функціонування експертної системи залежить від повноти, несуперечності, а також розміру бази знань. Велика кількість правил призводить як до зниження швидкості виконання логічного виводу, що неприпустимо для систем, які працюють у режимі реального часу, так і до суперечливості накопичених знань.

Тому розробка математичних методів і алгоритмів, що дозволяють структурувати систему правил і визначати порядок їх викликів, контролювати несуперечність і повноту, оптимізувати кількість правил, є актуальною задачею. При формуванні баз знань експертних систем існує 2 підходи: аналіз знань експертом (групою експертів) на основі досвіду, або автоматичне формування бази знань з використанням методів інтелектуального аналізу даних і алгоритмів машинного навчання. Використання другого підходу дозволяє виконувати процедури створення і контролю баз знань в автоматичному режимі. В даний час існує декілька підходів до автоматизації зазначених процесів.

В [1] з використанням теорії графів продукційна база знань представляється у вигляді мультиграфа, в якому кожному продукційному правилу відповідає власний підграф. Побудована таким чином база знань структурується, для збільшення швидкодії механізму логічного виводу умови правил зв'язуються зі значеннями атрибутів в робочій пам'яті, що дозволяє врахувати вплив результатів виконання одних продукційних правил на умови реалізації інших. В [2] розроблено математичну модель, яка представляє собою гіперграф. Всі сутності і залежності, що представлені в базі знань, об'єднуються у гіперграфі. Модифіковані алгоритми прямого та зворотного виведення здійснюють пошук на отриманому підграфі. В роботі [3] запропоновано підхід до структурування бази знань шляхом визначення рейтингів правил з подальшим видаленням суперечливих правил і правил з найменшими рейтингами.

Методи інтелектуального аналізу даних і нейронечітких технології останнім часом знаходять застосування при створенні та аналізі баз знань. Так в [4] запропонована математична модель нейронної мережі, яка допускає пряме перетворення бази знань в мережу. З використанням генетичного алгоритму виконується параметрична оптимізація структури бази знань. В роботі [5] пропонується поєднання методу кластерного аналізу та нечіткої моделі логічного виводу Такагі-Сугено для редукції бази знань, схожі правила логічного виведення об'єднуються в один кластер. Для оцінки схожості передумов правил при однакових значеннях логічних висновків використовуються спеціальні метрики. На число логічних висновків накладаються кількісні обмеження. В роботі [6] задача кластеризації знань в системах штучного інтелекту розв'язується із застосуванням мурашиних алгоритмів.

Зазначені підходи істотно поліпшують роботу експертних систем, однак дозволяють працювати тільки зі статичними базами знань, накладають обмеження на кількість логічних висновків і не можуть бути застосовані для випадків, коли в існуючу систему необхідно додавати нові логічні правила.

У даній роботі розвивається підхід, який дозволяє розширювати базу знань експертної системи новими правилами в процесі експлуатації.

**Постановка задачі.** Припустимо, що існує сформована продукційна база знань  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ , де  $R_i$  – нечітке продукційне правило;  $i = \overline{1, N}$ ;  $N$  – вихідна кількість правил в базі знань. При цьому передбачається, що у множені правил виділені  $k$  підмножин ( $k < N$ ), у яких правила згруповані за результатом логічного висновку. Підмножина правил містить правила, з використанням яких описуються приблизно однакові нечіткі закономірності в аналізованих даних і виконується класифікація об'єктів за допомогою алгоритму нечіткого логічного виведення. Передбачається, що існуюча система правил може бути розширена, коли у систему потрапляє новий об'єкт.

При цьому структура правила системи залишається незмінною. Подібні вимоги дозволяють уникати додаткових перевірок логічних правил на наявність протиріч після додавання нових правил в систему.

Необхідно розробити підхід, з використанням якого при виконанні процедури прямого логічного виведення стає можливим формування і додавання в систему нових продукційних правил для класифікації об'єктів, параметри яких відрізняються від вже використаних у навчальній вибірці при складанні бази правил.

**Продукційна модель представлення знань.** Розглядається задача ідентифікації об'єктів з використанням алгоритму нечіткого логічного виведення та системи продукційних правил.

Об'єкт  $X$  характеризується вектором параметрів  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , де  $x_i$  - вхідна лінгвістична змінна. З кожною лінгвістичною змінною пов'язано її нечітке значення  $A_j$ .

З кожним об'єктом  $X$ , що характеризується набором вхідних параметрів, зв'язується вихідна змінна  $Y$ . Вхід і вихід об'єкту, що досліджується, пов'язані між собою функціональною залежністю виду:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

де  $f$  – дійсна функція від чітких значень  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  набуває дискретних значень, оскільки число різних заключень логічних правил при будь-яких значеннях аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  є скінченним.

При розв'язанні задачі класифікації значеннями функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  є константи, що вказують на клас до якого належить об'єкт.

Апріорну інформацію стосовно залежності (1) можна зобразити у вигляді сукупності продукційних правил у такий спосіб:

$$P_p : \text{Якщо } x_1 \in A_{p1} \wedge x_2 \in A_{p2} \wedge \dots \wedge x_n \in A_{pn} \text{ ТО } Y = Y_p, \quad (2)$$

де  $p = \overline{1, P}$  – номер правила в базі правил;  $P$  – загальна кількість правил;  $A_{pj}$  – нечітке значення змінної  $x_i$  в термі  $j$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $Y_p$  – мітка деякого класу, до якого належить об'єкт  $X$ .

Сформована база правил може бути розбита на систему підмножин, що перетинаються, за значенням мітки класу в логічному заключенні правила:

$$R = \{R_1, R_2, \dots, R_N\} = \{Rul_1 | Y = Y_1 \cup Rul_2 | Y = Y_2 \cup \dots \cup Rul_k | Y = Y_k\}$$

де  $Rul_k$  – підмножина правил, в яких  $Y = Y_k$ . Для відображення чітких вхідних значень  $x_j$  – в нечіткі множини вводяться функції приналежності  $M_{pj}$  виду:

$$M_{pj}(x_j, a_p, b_p, c_p, d_p) = \begin{cases} 0, & x_j \leq a_p \\ \frac{x_j - a_p}{b_p - a_p}, & a_p \leq x_j \leq b_p \\ 1, & b_p \leq x_j \leq c_p \\ \frac{d_p - x_j}{d_p - c_p}, & c_p \leq x_j \leq d_p \\ 0, & d_p \leq x_j \end{cases} \quad (3)$$

де  $a_p, b_p, c_p, d_p$  - числові параметри, які визначають границі термів, набувають дійсних значень і впорядковані відношенням:  $a_p \leq b_p \leq c_p \leq d_p$ .

Границі термів визначаються за формулами відносно бази даних навчальної вибірки:

$$\bar{x}_j = \begin{cases} \left( \min_{i=1} (x_i), \max_{i=1} (x_i) \right), & j=1, J=2 \\ \left( \min_{i=1} (x_i), \max_{i=1} (x_i) \right), & j=J, J=2 \\ \left( \min_{i=1} (x_i), \min_{i=1} (x_i) + \frac{\left( \text{avg}_{i=1} (x_i) \right)}{J-2} \right), & j=1 \\ \left( \min_{i=1} (x_i) + \frac{(j-1) \cdot \text{avg}_{i=1} (x_i)}{J-1}, \max_{i=1} (x_i) - \frac{(J-j) \cdot \text{avg}_{i=1} (x_i)}{J-1} \right), & 1 < j < J \\ \left( \max_{i=1} (x_i) - \frac{\left( \text{avg}_{i=1} (x_i) \right)}{J-2}, \max_{i=1} (x_i) \right), & j=J \end{cases}, \quad (4)$$

де  $j=1, J, J \geq 2, J$  - кількість елементів терм-множини лінгвістичної змінної, якщо  $J < 2$  - немає сенсу створювати таку лінгвістичну змінну.

**Метод розв'язання.** Для виконання процедури нечіткого логічного виведення введемо такі операції, аналогічно [8].

Для виконання процедури фазифікації вхідних змінних  $x_i$  в вектор нечітких множин  $A_{pj}$  будемо використовувати наступну операцію:

$$A_{pj} = \int_{\underline{x}_i}^{\bar{x}_i} (M_{pj}(x_i)/x_i) dx \quad (5)$$

де  $\underline{x}_i, \bar{x}_i$  – границі термів вхідних змінних.

Для виконання процедури дефазифікації будемо використовувати:

$$Y_p = \int_{\underline{Y}}^{\bar{Y}} (M_{Y_p}(Y)/Y) dY, Y \in [\underline{Y}; \bar{Y}] \quad (6)$$

де  $\underline{Y}, \bar{Y}$  – границі терму вихідної змінної.

Ступінь приналежності вхідного об'єкта  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  нечітким термам  $Y_p$  з бази знань (2) описується системою нечітких логічних рівнянь:

$$M_{Y_p}(x^*) = \bigvee_{p=1, P_i=1, N} \bigwedge [M_{pj}(x_i^*)], j = \overline{1, m} \quad (7)$$

де оператори  $\vee$  та  $\wedge$  відповідають виконанню логічних операцій «АБО» та «І» відповідно. В роботі використані їх реалізації у вигляді знаходження *max* та *min*.

Нечітка множина  $\tilde{Y}^*$ , що відповідає вхідному вектору  $X^*$  визначається у вигляді:

$$\tilde{Y}^* = \mathit{agg}_{j=1, m} \left( \int_{\underline{Y}}^{\bar{Y}} \mathit{imp}(M_{Y_p}(X^*), M_{Y_p}(Y)/Y) dY \right) \quad (8)$$

де *imp* – операція імплікації, *agg* – операція агрегування, які реалізовані операцією знаходження *min* та *max* відповідно.

Чітке значення виходу  $Y^*$  визначається в результаті дефазифікації нечіткої множини  $\tilde{Y}^*$  за методом центру тяжіння:

$$Y^* = \int_{\underline{Y}}^{\bar{Y}} Y \cdot M_{\tilde{Y}^*}(Y) dY / \int_{\underline{Y}}^{\bar{Y}} M_{\tilde{Y}^*}(Y) dY \quad (9)$$

Для виконання ідентифікації об'єкта використовується алгоритм нечіткого логічного виведення [7], модифікований введенням додаткового механізму порівняння чіткого вихідного значення  $Y^*$ , отриманого для об'єкта  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , і вихідних значень об'єктів  $Y_i$  наявних в базі знань. Схему модифікованого алгоритму нечіткої логіки наведено на рис. 1. Відстань між об'єктами визначається на основі обраної метрики в просторі характеристик. Для оцінки міри близькості елементів використовується Евклідова відстань:

$$d(Y^*, Y_i) = \sqrt{\sum_{t=1}^m (Y_t^* - Y_{it})^2} \quad (10)$$

$$d(Y^*, Y_i) < \varepsilon \quad (11)$$

У разі, коли для об'єкта  $X^*$  умова (11) не виконується, необхідно сформулювати нове логічне правило:

$$P_{p+1} : \text{Якщо } x_1 \in A_{k1} \wedge x_2 \in A_{k2} \wedge \dots \wedge x_n \in A_{kn} \text{ ТО } Y_{p+1} = X^* , \quad (12)$$

де  $A_{kj}$  – нечіткі значення змінних  $x_j$ , які обчислюються з використанням функції приналежності (5) при значеннях  $a_{k1} = x_1^*, a_{k2} = x_2^*, \dots, a_{kn} = x_n^*$ .

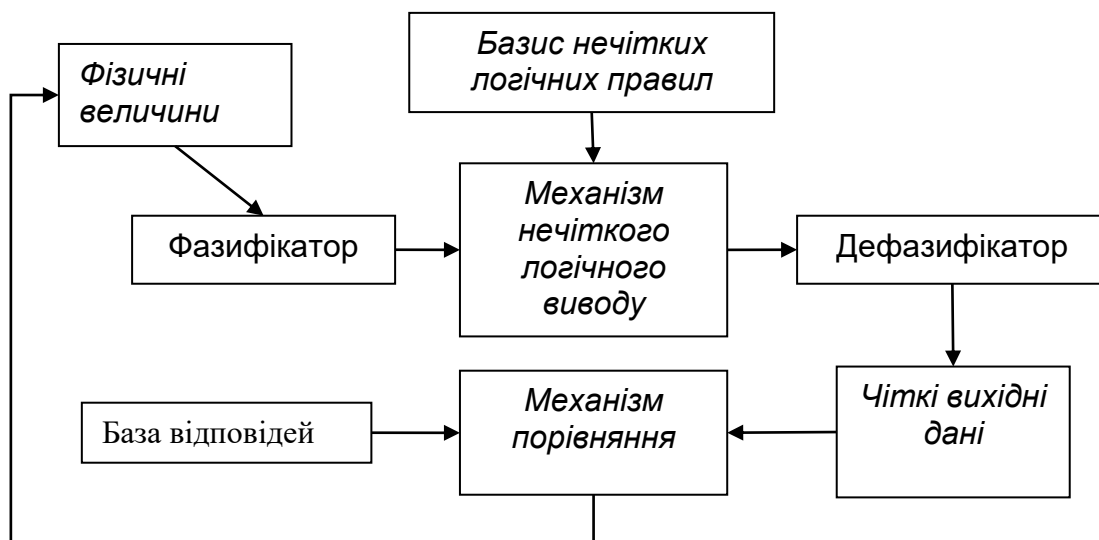


Рис. 1. Модифікований алгоритм нечіткої логіки

У разі, коли для об'єкта  $X^*$  умова (11) не виконується, необхідно сформулювати нове логічне правило:

$$P_{p+1} : \text{Якщо } x_1 \in A_{k1} \wedge x_2 \in A_{k2} \wedge \dots \wedge x_n \in A_{kn} \text{ ТО } Y_{p+1} = X^* , \quad (12)$$

де  $A_{kj}$  – нечіткі значення змінних  $x_j$ , які обчислюються з використанням функції приналежності (5) при значеннях  $a_{k1} = x_1^*, a_{k2} = x_2^*, \dots, a_{kn} = x_n^*$ .

Після виконання процедури дефазифікації обчислюється  $d(Y^*, Y)$  та перевіряється умова (11).

Вказану послідовність дій для існуючої бази правил можна описати наступним алгоритмом.

Алгоритм:

Крок 1. Задати значення  $\varepsilon$  – похибка системи,  $P$  – загальне число правил, ініціалізувати вхідні змінні, задати функції приналежності.

Крок 2. Для об'єкта  $X^*$  на базі сформованих продукційних правил за допомогою операцій алгоритму нечіткого логічного виведення (5) - (8) розрахувати ступені приналежності об'єкта чітким множинам  $\tilde{Y}_p$ .

За формулою (9) отримати чітке значення  $Y^*$  для об'єкта  $X^*$ .

Для об'єктів  $Y_k$ , які є логічними висновками правил з системи (2), так само виконати процедуру нечіткого логічного виведення та отримати відповідні значення  $Y_k^*, k = \overline{1, K}$ .

Крок 3. Визначити відстані між об'єктом  $Y^*$  і існуючими об'єктами  $Y_k$ , перевірити виконання умови (11).

Якщо нерівність є вірною перейти до кроку 6, інакше перейти до кроку 4.

Крок 4. Доповнити базу знань правилом (12);  $p := p + 1$ .

Крок 5. Перерахувати границі термів нечітких множин відповідно до формул (4).

Крок 6. Видати результат ідентифікації.

Крок 7. Перевірка правил останову:

Перевірити, чи всі об'єкти навчальної вибірки переглянуті, якщо так, то зупинитися, інакше обрати наступний об'єкт і перейти до кроку 3.

**Аналіз результатів.** Запропонований підхід до формування бази правил при пред'явленні елементів навчальної вибірки був протестований для задачі класифікації користувача відносно персонажа бази даних «CMD - Combat Marvel DC»[8]. В якості вхідних параметрів персонажа виступають: зріст (см), вага (кг), вік (роки). Зазначені параметри описуються нечіткими значеннями.

Формуються відповідні терми вхідних змінних:

Зріст (низький, середній, високий);

Вага (низька, середня, висока);

Вік (молодий, середній, дорослий).

Вихідна змінна характеризує класи об'єктів: Клас (I, II, III).

Для кожної вхідної та вихідної змінних вводяться функції приналежності виду (3), обчислюються границі термів за формулами (4).

Границі термів:

Зріст\_низький = (155, 174.6);

Зріст\_середній = (164.83, 186.33);

Зріст\_високий = (174.6, 198);

Вага\_низка = (50, 73.33);

Вага\_середня = (61.6, 89.16);

Вага\_висока = (73.33, 105);

Вік\_молодий = (19, 26.33);

Вік\_середній = (22.7, 30.7);

Вік\_дорослий = (26.33, 35);

Клас\_I = (0, 0.5);

Клас\_II = (0.25, 0.75);

Клас\_III = (0.5, 1);

Формується система правил, передумови яких складені з усіх можливих комбінацій значень нечітких вхідних змінних (всього 27 правил).

У таблиці представлені результати ідентифікації різних об'єктів при заданих значеннях  $\varepsilon = 2,5$ ,  $P = 27$ , база даних персонажів:  $X_{01}(198,105,35)$ ,

$X_{02}(171,65,25)$ ,  $X_{03}(155,50,19)$ . Вхідні об'єкти:  $X_1(175,70,20)$ ,  $X_2(180,73,21)$ . У таблиці 1 подано результати ідентифікації.

Для об'єкта  $X_1$  система повертає об'єкт  $X_{02}$ , який знаходиться найближче. Фактично ми відобразили об'єкт  $X_1$  в множину об'єктів бази відповідей  $X_{01}, X_{02}, X_{03}$ . Для об'єкта  $X_2$  відстань  $d = 8,072$ , тобто умова  $d < \varepsilon$  не виконується, отже, потрібно додати цей об'єкт і розширити систему правил правилом з новим заключенням.

Таблиця 1

## Результати ідентифікації

	Вхідні параметри			Дефазфіцировані значення $Y^*$	$\min_{j=1} (d(X_i, X_j))$	Результат класифікації $i$	Заклучення
	Зріст (см)	Вага (кг)	Вік (роки)				
$X_1$	175	70	20	42,857	2,179	Клас_II	X02
$X_2$	180	73	21	48,75	8,072	Клас_II	Новий
$X_{01}$	198	105	35	75	0	Клас_I	X01
$X_{02}$	171	65	25	40,678	0	Клас_II	X02
$X_{03}$	155	50	19	25	0	Клас_III	X03

Запропонований алгоритм, було реалізовано у вигляді програмного продукту з використанням мов C/C++ та JavaScript, а також текстового формату обміну даними JSON. Для розробки використовувалися: NetBeans IDE, WhiteStarUML, GitHub, WebGL, Chrome, Mozilla Firefox, Opera.

Розроблений алгоритм має наступні переваги: висока швидкість розв'язання задачі; можливість розширення кількості відповідей системи, без зміни існуючих правил у базі знань і алгоритму логічного виведення; розширення спектру застосування алгоритмів нечіткої логіки.

Розроблений алгоритм має наступні недоліки: якщо в базі відповідей системи є об'єкти схожі один на одного, вони можуть мати однаковий центр ваги, що в свою чергу призводить до додаткових перевірок; мінімальну відстань для відображення об'єкта потрібно підбирати експериментальним шляхом.

**Висновки.** Запропоновано підхід до автоматичної генерації продукційних правил бази знань на основі порівняння нових об'єктів з вже існуючими у системі за допомогою метрики, модифіковано алгоритм нечіткого логічного виведення шляхом додавання блоку порівняння вихідного значення для нового об'єкту з вихідними значеннями для наявних у базі знань об'єктів.

Подальші дослідження будуть спрямовані на вдосконалення запропонованого підходу шляхом обчислення чітких вихідних даних для бази відповідей заздалегідь і внесення цих даних до бази відповідей, але для цього буде потрібно створити механізм контролю даних для постійного їх



оновлення і перезапису в разі зміни або модифікації правил системи, а також в разі додавання нових відповідей системи.

### Бібліографічні посилання

1. **Домнич В.С., Иващенко В.А.** Построение базы знаний для поиска причин аварийных ситуаций при формировании листового стекла / В.С. Домнич, В.А. Иващенко // УБС. – 2011. – Вып. № 33. – С. 218–232.
2. **Иванов А.С.** Модель представления продукционных баз знаний на ЭВМ / А.С. Иванов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. –2007. – 7:1. – С. 83–88.
3. **Сергиенко М.А.** Методы проектирования нечеткой базы знаний / М.А. Сергиенко // Вест. Воронеж. гос. ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2008. –№ 2. – С. 67–71.
4. **Бухнин А.В., Бажанов Ю.С.** Оптимизация баз знаний экспертных систем с применением нейронных нечетких сетей / А.В. Бухнин, Ю.С. Бажанов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. –2007. – №11.
5. **Абдулхаков А.Р., Катасёв А.С.** Кластерно-генетический метод редукции баз знаний интеллектуальных систем / А.Р. Абдулхаков, А.С. Катасёв // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 5-3. – С. 471–475.
6. **Щуревич Е.В.** Кластеризация знаний в системах искусственного интеллекта / Е.В. Щуревич // Информационные технологии. – 2009. – №2. – С. 25–29.
7. **Ротштейн А.П.** "Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети". – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book5/index.php>
8. **Егошкин Д.И.** "CMD - Combat Marvel DC". – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://knightdanila.github.io/CMD/index.html>

*Надійшла до редколегії 15.09.2018.*

**Р.В. Кириленко, Н.А. Гук, О.В. Верб**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПЕРЕДБАЧЕННЯ ПСИХОЛОГІЧНОЇ РЕАКЦІЇ КОРИСТУВАЧА ПРИ ПЕРЕГЛЯДІ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЗАСОБАМИ МАШИННОГО НАВЧАННЯ**

В статті розглядається комплекс алгоритмів для розв'язання задачі прогнозування психологічної реакції користувача на зображення при перегляді цифрових зображень. Для виділення облич на зображеннях використовуються діаграми орієнтованих градієнтів. Прогнозування психологічної реакції виконується з використанням нейронної мережі.

**Ключові слова:** штучна нейронна мережа, метод зворотного розповсюдження помилки, антропологічні точки, гістограма орієнтованих градієнтів, згорткова нейронна мережа, прогнозування.

В статье рассматривается комплекс алгоритмов для решения задачи прогнозирования психологической реакции пользователя на изображения при просмотре цифровых изображений. Для выделения лиц на изображениях используются диаграммы ориентированных градиентов. Прогнозирование психологической реакции выполняется с использованием нейронной сети.

**Ключевые слова:** искусственная нейронная сеть, метод обратного распространения ошибки, антропологические точки, гистограмма ориентированных градиентов, сверточная нейронная сеть, прогнозирование.

In the article, a problem of prediction a user's psychological response to the presented image is considered. A complex algorithm that solves proposed problem with respect to fuzzy input data which operates in real time is proposed.

A classification problem for each particular user based on previously generated content by the user using a set of algorithms including machine learning algorithm is considered. Due to a huge amount of variety in possible input data and it's complexity algorithms that reduce fuzziness are considered. In order for a prediction system to understand and learn from data it has been provided, it has to be prepared in such a way that the algorithm could more easily find patterns and inferences. For that purpose, all incoming data passes two additional steps which also allows the system to neglect fuzziness.

At the first step, the software has to definitely determine a presence of the desired object (face, in the article) which must be done fast enough to be made in a time of presenting the picture to a user and it must be stable to data fuzziness. In order to solve that problem histogram of oriented graphs is considered. Because of its nature, the algorithm solves a problem in comparatively fast and robust way. At the second step, the face landmark estimation algorithm is considered. It allows the system to reduce the number of patterns that have to be learned in order to predict the behavior reducing the number of such patterns by narrowing down the two-dimensional transform of the object.

The last step, prediction, is implemented with an artificial neural network that embraces incoming object and determines user's resolution based on its experience. Such algorithm

allows the system to keep learning throughout its life cycle which leads to constant improvements in its results. The proposed algorithms complex was implemented. High speed, fuzziness resistance, independence of external conditions can be considered as its advantages. Slow learning cycle can be considered as its main disadvantage. Tests' results provided in the article.

**Key words:** artificial neural network, method of reverse error propagation, anthropological points, histogram of oriented gradients, convolutional neural network, forecasting.

**Вступ.** Автоматизація процесів у наш час здійснюється у багатьох сферах діяльності людини. Потреба в автоматизації виникла ще в глибоку давнину і постійно зростала в процесі розвитку людських потреб і засобів виробництва. Задача, що розглядається у даній роботі, тісно пов'язана із автоматизацією процесів мозку людини, а саме процесу розпізнавання обличчя на зображенні та прогнозування психологічної реакції людини при перегляді цього зображення. Прогнозування відбувається на основі паттернів поведінки людини та існуючої навчальної вибірки, отриманої при попередньому перегляді зображень. Результати прогнозування можливе використовувати при відборі облич для рекламних зображень, при формуванні контекстних вибірок зображень на сайтах знайомств.

**Аналіз публікацій за темою дослідження.** В останні роки спостерігається розвиток підходів щодо розпізнавання зображень та оцінювання привабливості облич, заснований на системах машинного зору та класифікаторах, для яких розробляються алгоритми навчання. Із використанням запропонованих методів та алгоритмів можливо класифікувати обличчя. У роботі [4] у якості ознак, за якими визначається привабливість, пропонується використовувати пропорції рис обличчя по ключовим точкам. Недоліком запропонованого підходу є необхідність визначати необхідні точки на обличчі власноруч. В [6] для виділення характерних ознак, за якими класифікується зображення, окрім пропорцій було використано також метод головних компонент. В [8] для розв'язання задачі використовувався нейромережевий підхід.

**Постановка задачі.** Задача полягає у розробці комплексного підходу, що дозволяє передбачити психологічну реакцію користувача на зображення, що демонструється, базуючись на попередньому досвіді системи – емоційних реакціях людини при перегляді зображень, що демонструвались йому раніше. В якості вхідних даних виступає фотографічне зображення обличчя людини в момент перегляду зображення. На виході програма повинна надати оцінку емоційної реакції користувача на переглянуте зображення.

**Модель задачі прогнозування.** Сформульовану задачу будемо розглядати як задачу класифікації зображень для кожного окремо взятого користувача. Оскільки рішення про емоційну оцінку людини, що приймає система, повинно ґрунтуватись на попередньому досвіді, будемо використовувати моделі та методи машинного навчання, як альтернативу створенню математичної моделі. Слід зазначити, що математичні алгоритми машинного навчання працюють з великими обсягами даних і здатні знаходити приховані

закономірності поведінки об'єкту спостереження. Головним при використанні таких моделей є наявність інформації про об'єкт. Для розв'язання сформульованої задачі будемо використовувати вибірку, яка складається з ситуаційних прикладів та відомих реакцій людини, виявлених під час перегляду цих прикладів. Розроблений алгоритм повинен узагальнити досвід попередніх спостережень за реакціями людини для обробки нових випадків, які не зустрічалися раніше, та результат яких заздалегідь не є відомим. Така система повинна вміти налагоджувати свій алгоритм прийняття рішень автоматично, отримуючи навчальні приклади при опитуванні користувача в реальному режимі часу.

В рамках галузі аналізу даних машинне навчання є методом, який використовується для ідентифікації складних моделей. Методи машинного навчання дозволяють побудувати процес навчання на існуючих прикладах і виконувати передбачуваний аналіз на них.

**Метод розв'язання задачі.** Для розв'язання сформульованої задачі прогнозування емоційної реакції людини на переглянуте зображення необхідно зробити попередню обробку фотографії людини під час перегляду зображення, відобразити обличчя у вигляді масиву числових даних, розробити систему підтримки прийняття рішень, що оцінює емоційну реакцію людини стосовно переглянутого зображення, як позитивну або негативну.

Першим кроком загального алгоритму розв'язання задачі є визначення обличчя на фотографії. Метод повинен відпрацьовувати досить швидко, оскільки система повинна працювати в режимі реального часу при перегляді зображень користувачем. Двома іншими важливими критеріями є стійкість до наявності шуму у вхідних даних та освітлення фотографії. Додатковим кроком у попередньої обробці зображення є вирівнювання обличчя (позиціонування). Цей крок дозволяє системі отримати стійкі до поворотів голови у тривимірному просторі вхідні дані. Наступний крок – кодування обличчя. Головним результатом роботи алгоритму кодування обличчя є представлення вхідного зображення у вигляді масиву числових даних.

Фінальний крок – це прийняття рішення стосовно емоційної оцінки переглянутого зображення. На цьому етапі система повинна побудувати розв'язок на базі алгоритму машинного навчання. Навчання системи відбувається у режимі реального часу з використанням вхідного масиву даних, похибка навчання визначається як різниця між реальною відповіддю користувача та відповіддю системи, отриманої у результаті прогнозування. Для визначення обличчя на фотографії необхідно застосувати метод, який є стійким до геометричних, фотометричних похибок та яскравості обличчя.

У роботі для однозначного визначення обличчя на фотографії було реалізовано дескриптор ознак [3], відомий як гістограма спрямованих градієнтів. В основі цього методу лежить припущення, що вигляд розподілу градієнтів інтенсивності зображення дозволяє досить точно визначити наявність і форму розташованих на ньому об'єктів.

Для опису зображення здійснюється його дискретизація на кілька невеликих ділянок, комірок прямокутної форми. В комірках обчислюються гістограми  $h_i$  спрямованих градієнтів внутрішніх точок. Потім гістограми внутрішніх точок об'єднуються в єдину гістограму  $h = f(h_1, \dots, h_k)$ , яка нормалізується за яскравістю із використанням  $L1$  або  $L2$  – норми:

$$h_{\sqrt{L_1}} = \sqrt{L_1}, \quad h_{L_2} = \frac{h}{\sqrt{|h|_2^2 + \varepsilon}}, \quad h_{L_1} = \frac{h}{\sqrt{|h|_1 + \varepsilon}},$$

де  $\varepsilon$  – деяка мала константа.

Таким чином, даний дескриптор містить просторову інформацію про зображення і є інваріантним до висвітлення зображення.

При обчисленні градієнтів проводиться згортка зображення з ядрами  $[-1, 0, 1]$  и  $[-1, 0, 1]^T$  в результаті чого утворюються дві матриці  $D_x$  та  $D_y$  похідних уздовж осей  $x$  та  $y$  відповідно. Означені матриці використовуються для обчислення кутів і величин (модулів) градієнтів в кожній точці зображення. Нехай множина кутів  $(-\pi, \pi]$  розбивається на  $n$  рівних інтервалів, що мають вигляд

$$\left( -\frac{k-1}{n}\pi, \frac{k}{n}\pi \right],$$

де  $k = \overline{1, n}$ .

Кожному інтервалу ставиться у відповідність промінь гістограми. Тоді гістограма комірки заповнюється у такий спосіб: величина градієнта в кожній внутрішній точці додається до величини променя, що відповідає інтервалу, який містить кут даного градієнта.

Для обчислення інтегральних градієнтів вихідного зображення  $X \in R^{m \times n}$  уздовж осей  $x$  та  $y$ , дві різницьові матриці  $D_x$  та  $D_y$  обчислюються у такий спосіб:

$$D_x(x, y) = X(x, y) - X(x+1, y), \quad x \in \{0, \dots, m-1\}, \quad y \in \{0, \dots, n\},$$

$$D_y(x, y) = X(x, y) - X(x, y+1), \quad x \in \{0, \dots, m\}, \quad y \in \{0, \dots, n-1\}.$$

З їх допомогою обчислюються матриці кутів  $A$  і модулів  $V$  градієнтів:

$$A(x, y) = \arctan \frac{D_x}{D_y}, \quad V(x, y) = \sqrt{D_x(x, y)^2 + D_y(x, y)^2}$$

де  $x \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $y \in \{0, \dots, n-1\}$

Для побудови гістограми з  $n$  променів матриці  $A$  та  $V$  зводяться до дискретного вигляду:

$$A_n(x, y) = \left[ A(x, y) \frac{n}{2\pi} \right],$$

$$V_i(x, y) = \begin{cases} V(x, y), & \text{якщо } A_n(x, y) = i; \\ 0, & \text{якщо } A_n(x, y) \neq i, \end{cases}$$

де  $n$  — кількість променів,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$

Множина матриць  $I(V_i)$  буде називатись променями інтегральних градієнтів зображення.

Експериментально було виявлено [10], що оптимальна якість розпізнавання досягається при кількості променів порядку восьми. Далі до променів інтегральних градієнтів застосовується операція проріджування.

Обчислення дескрипторів здійснюється в процесі сканування зображення на різних масштабах з деяким ковзаючим вікном  $U$ . Нехай  $U = (U_x, U_y)$  — розміри вікна,  $dU = (dU_x, dU_y)$  — приріст кроку,  $V = (V_x, V_y)$  — розмір комірок, з яких складається вікно  $U$ , а  $dV = (dV_x, dV_y)$  — відстань між комірками.

Введемо також поняття одиниці довжини  $E = (E_x, E_y)$ , як вектор максимальної довжини, до якого кратні вектори  $U$ ,  $dU$ ,  $V$ , и  $dV$ . При  $E \neq (1,1)$ , не впливаючи на остаточний результат, інтегральне зображення може бути проріджене так, щоб нова одиниця довжини стала дорівнювати одиничному вектору. Проріджена матриця  $T(Y)$  інтегрального зображення  $Y = (IX)$  обчислюється наступним чином:

$$\forall Y \in R^{(m+1) \times (n+1)} \exists Z \in R^{\left(1 + \left\lceil \frac{m}{E_x} \right\rceil\right) \times \left(1 + \left\lceil \frac{n}{E_y} \right\rceil\right)}, Z = T(Y): Z(u, v) = Y(u * E_x, v * E_y)$$

При проріджуванні всі параметри ковзання зберігають свої значення при всіх масштабах ковзного вікна, змінюється тільки одиниця довжини  $E$ . При цьому відношення  $dU_x/U_x$  та  $dU_y/U_y$  мають постійні значення, тому якість розпізнавання є інваріантною до розміру ковзного вікна. Отримавши дескриптор зображення, система поетапно порівнює його з шаблоном обличчя, однозначно визначає положення обличчя на зображенні та трансформує вхідне зображення таким чином, щоб на ньому залишилось лише обличчя.

Для розв'язання задачі позиціонування було реалізовано алгоритм, відомий під назвою оцінка орієнтирів обличчя (face landmark estimation). Основна ідея полягає в тому, що на обличчі людини визначаються 68 особливих точок (званих орієнтирами), які існують на кожному обличчі характерними серед них є: верхня частина підборіддя, зовнішня точка кожного ока, внутрішня точка кожної брови та інші. Положення особливих точок на будь-якому обличчі визначається за допомогою алгоритму машинного навчання.

В роботі [9] показано, що вирівнювання обличчя можна зробити за допомогою каскаду функцій регресії. В даному випадку кожна функція регресії в каскаді здатна ефективно оцінювати форму від початкової оцінки і інтенсивності розрідженого набору пікселів, проіндексованих щодо цієї початкової оцінки. Форма обличчя  $S = [x_1, y_1, \dots, x_{N_{fp}}, y_{N_{fp}}]^T$  складається з  $N_{fp}$  орієнтирів обличчя. Мета вирівнювання обличчя полягає в тому, щоб оцінити форму  $S$ , яка максимально наближена до істинної форми обличчя  $S_t$ , тобто мінімізувати вираз  $\|S - S_t\|$ . У роботі було використано посилену регресію, щоб об'єднати  $T$  слабких регресивів  $(R^1, \dots, R^T)$  адитивним чином. Використовуючи зображення обличчя  $I$  і початкову форму обличчя  $S_0$ , кожен з регресорів обчислює приріст форми  $\delta S$ , а потім оновлює форму обличчя каскадним чином:

$$S^t = S^{t-1} + R^t(I, S^{t-1}), \quad t = 1, \dots, T$$

де  $t$ -ий слабкий регресор  $R^t$  оновлює попередню форму  $S^{t-1}$  до нового виду  $S^t$ .

Маючи  $N$  навчальних прикладів, регресори  $(R^1, \dots, R^T)$  послідовно навчаються до тих пір, поки значення помилки навчання не стабілізується. Кожен з регресорів  $R^t$  навчається шляхом явної мінімізації суми помилок вирівнювання:

$$R^t = \arg \min_R \sum_{i=1}^N \left\| \hat{S}_i - \left( S_i^{t-1} + R(I_i, S_i^{t-1}) \right) \right\|$$

де  $S_i^{t-1}$  – форма, яка обчислюється на попередньому кроці.

Розв'язання задачі кодування обличчя здійснюється з використанням згорткової нейронної мережі глибокого навчання. Метою навчання мережі є визначення характерних точок для кожного обличчя. Під час навчання мережі водночас здійснюється аналіз трьох зображень: #1 – зображення відомою людиною, обране для навчання мережі; #2 – інше зображення тієї ж людини; #3 – зображення зовсім іншої людини. Навчання нейронної мережі відбувається до тих пір, поки вимірювання, отримані для зображень #1 і #2, будуть більш схожі, а вимірювання для зображень #2 і #3 – менш схожі. Процес навчання згорткової нейронної мережі для отримання карти осіб вимагає великої кількості даних і потужного комп'ютера. У роботі використовується існуюча у відкритому доступі нейронна мережа [7].

На останньому кроці відбувається прийняття рішення реакції людини на переглянуте зображення. Для цього використовується штучна нейронна мережа типу персептрон. Топологія мережі складається з чотирьох шарів: вхідного, двох прихованих та вихідного. На вхідному шарі було розташовано 128 нейронів; приховані шари мають 64 та 32 нейрона відповідно; вихідний

шар складається з двох нейронів. Для навчання такої мережі було реалізовано алгоритм зворотного поширення помилки, який належить до класу алгоритмів навчання з вчителем. Оскільки мережа навчається у режимі реального часу у процесі роботи з користувачем, у системі було реалізовано алгоритм безперервного навчання. Редагування ваг зав'язків мережі, відбувається на кожному кроці навчання, що дозволяє покращувати результат передбачення з кожним наступним кроком. Запропонований підхід було реалізовано у вигляді пакету прикладних програм.

**Результати.** При розробці кожного з етапів роботи програми (алгоритмів) проводились тестування та аналіз якості роботи. Аналіз якості визначення обличчя людини на зображенні виконано у обчислювальному експерименті. Для експерименту було відібрано 2103 довільних зображень без обличчя та 1698 довільних зображень з обличчям з відкритої бази зображень Open Images Dataset V4. У якості входу програмі надавалось зображення, на вихід програма давала відповідь у вигляді булевої змінної – true, або false, що виражає присутність обличчя на поданому зображенні. У табл. 1 подано порівняння результатів розпізнавання облич на зображеннях з обличчями та без них. Слід зазначити, що відносна похибка ідентифікації менша у випадку використання зображень без облич, оскільки такі зображення можуть містити велику кількість зайвої інформації, що миттєво відкидається. Як видно з таблиці, з використанням запропонованого підходу відносна похибка не перевищує 1% при відносно великій швидкості роботи алгоритму.

Таблиця 1.

## Результат тестування дескриптору ознак для ідентифікації облич на зображенні

Типи зображень	Результат ідентифікації	Дійсне значення	Відносна похибка, %
Зображень з обличчям	1711	1698	0.7
Зображень без обличчя	2109	2103	0.2

У таблиці 2 наведено результати прогнозування позитивної реакції людини на переглянуте зображення на ітераціях алгоритму.

У обчислювальному експерименті користувачеві демонструвалось зображення з обличчям, під час перегляду відбувався аналіз стану обличчя глядача із використанням контрольних точок обличчя. Розроблена система надавала прогноз у вигляді відсотку імовірності позитивної реакції глядача на зображення, що демонструвалось. Під ітерацією мається на увазі порядковий номер зображення, що демонструється; під прогнозом мається на увазі імовірність позитивної відповіді користувача, визначена на інтервалі  $[0;1]$ , що отримано із використанням побудованої системи; під дійсною відповіддю розуміється обраний користувачем варіант реакції (1 – позитивна, 0 – негативна). Під час експерименту результат прогнозу не демонструвався користувачеві аби не впливати на подальші його відповіді.



Таблиця 2

## Результат тестування моделі прийняття рішень

Ітерація	Прогноз (позитивна реакція)	Дійсна відповідь
1	0.781	1
10	0.677	0
25	0.602	0
50	0.364	0
75	0.79	1
100	0.891	1
150	0.155	0
200	0.923	1
250	0.931	1
300	0.939	1
350	0.921	1
400	0.95	1
450	0.045	0
500	0.943	1

**Висновки.** Запропонований у даній роботі комплекс алгоритмів успішно реалізовано та перевірено у практичних умовах. Даний підхід є стійким до вхідних даних за наявності шуму та здатен до самовдосконалення з плином часу.

## Бібліографічні посилання

1. **Галушкін, А. І.** Теорія нейронних мереж. Кн. 1: Посібник для вузів [Текст] / А. І. Галушкін. – М., 2000. – 416 с.
2. **Головко, В. А.** Нейронні мережі: навчання, організації та використання [Текст] / Головко В. А., – М., 2001. – 256 с.
3. **Южаков, Г.Б.** Алгоритм быстрого построения дескрипторов изображения, основанных на технике гистограмм ориентированных градиентов // Информатика, математическое моделирование, экономика. - Москва: ТРУДЫ МФТИ, 2013. – Том 5, № 3, с. 84-91.
4. **Aarabi, P.** The automatic measurement of facial beauty / P. Aarabi, D. Hughes, K. Mohajer, M. Emami // IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 710 October 2001, Tucson, USA. V. 4. P. 2644-2647.
5. **Dalal, N.** Histograms of Oriented Gradients for Human Detection. [Текст] / Dalal N., Triggs B. // 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05). 20-25 June 2005 San Diego, USA.
6. **Eisenthal Y., Dror G., Ruppin E.** Facial Attractiveness: Beauty and the Machine / Y. Eisenthal, G. Dror, E. Ruppin // Neural Computation. – 2006. – V. 18, № 1. – P. 119-142.
7. "Face recognition with deep neural networks." – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://github.com/cmusatyalab/openface>
8. **Gan J., Li L., Zhai Y.** Deep self-taught learning for facial beauty prediction / J. Gan, L. Li, Zhai Y. Deep // Neurocomputing. DOI: 10.1016/j.neucom.2014.05.028

9. **Salton G.** Introduction to Modern Information Retrieval. [Текст] / Gerard Salton – New York: McGraw-Hill, 1983 – 400 с.
10. **Vahid Kazemi** One Millisecond Face Alignment with an Ensemble of Regression Trees. [Текст] / Vahid Kazemi, Josephine Sullivan // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2014.
11. **Xavier P.** Robust face landmark estimation under occlusion [Текст] / Xavier P. Burgos-Artizzu, Pietro Perona, Piotr Dollar // 2013 IEEE International Conference on Computer Vision. 1-8 Dec. 2013. Sydney, NSW, Australia.

*Надійшла до редколегії 17.09. 2018.*

**О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара**  
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЦІЛЬОВОМУ ФУНКЦІОНАЛІ**

Запропоновано алгоритм розв'язання неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини з  $n$ -вимірною евклідовою простору  $E_n$  на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Алгоритм заснований на застосуванні нейронечітких технологій та  $r$ -алгоритму Н.З. Шора.

**Ключові слова:** оптимальне розбиття, недиференційовна оптимізація, нечіткий параметр, нейронечіткі технології,  $r$ -алгоритм.

Предложен алгоритм решения непрерывной линейной однопродуктовой задачи оптимального разбиения множества из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества с отысканием координат центров этих подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств, целевой функционал которой имеет нечеткие параметры. Алгоритм основан на применении нейронечетких технологий и  $r$ -алгоритма Н.З. Шора.

**Ключевые слова:** оптимальное разбиение, недифференцируемая оптимизация, нечеткий параметр, нейронечеткие технологии,  $r$ -алгоритм.

The mathematical theory of optimal set partitioning (OSP) of the  $n$ -dimensional Euclidean space, which has been formed for today, is the field of the modern theory of optimization, namely, the new section of non-classical infinite-dimensional mathematical programming. The theory is built based on a single, theoretically defined approach that sum up initial infinite-dimensional optimization problems in a certain way (with the function of Lagrange) to non-smooth, usually, finite-dimensional optimization problems, where latest numerical non-differentiated optimization methods may be used - various variants  $r$ -algorithm of N.Shor, that was developed in V. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

For now, the number of directions have been formed in the theory of continuous tasks of OSP, which are defined with different types of mathematical statements of partitioning problems, as well as various spheres of its application. For example, linear and nonlinear, single-product and multiproduct, deterministic and stochastic, in the conditions of complete and incomplete information about the initial data, static and dynamic tasks of the OSP without limitations and with limitations, both with the given position of the centers of subsets, and with definition the optimal variant of their location. Optimal set partitioning problems in uncertainty are the least developed for today is the direction of this theory, in particular, tasks where a number of parameters are fuzzy, inaccurate, or there are insufficient mathematical description of some dependencies in the model. Such models refer to the fuzzy OSP problems, and special solutions and methods are needed to solve them.

In this paper, we propose an algorithm for solving a continuous linear single-product problem of optimal set partitioning of  $n$ -dimensional Euclidean spaces  $E_n$  into a subset with searching of coordinates of the centers of these subsets with restrictions in the form of equalities and inequalities where target function has fuzzy parameters. The algorithm is built based on the application of neuro-fuzzy technologies and N.Shor  $r$ -algorithm.

**Keywords:** optimal partitioning, non-differentiable optimization, fuzzy parameter, neuro-fuzzy technologies,  $r$ -algorithm.

**Вступ.** Основи математичної теорії неперервних задач ОРМ  $n$ -вимірному евклідовому простору на підмножини, які є некласичними задачами нескінченновимірному математичного програмування з булевими змінними, закладені в роботі [1], в якій наведена численна бібліографія, а також широкий спектр практичних застосувань неперервних задач оптимального розбиття множин та споріднених з ними задач. Це лінійні і нелінійні, однопродуктові й багатопродуктові, детерміновані й стохастичні, в умовах повної та неповної інформації про вихідні дані, статичні та динамічні задачі ОРМ без обмежень і з обмеженнями, як із заданим положенням центрів підмножин, так і з відшукування оптимального варіанту їх розташування.

Для розв'язання наведених класів задач оптимального розбиття множин запропонований єдиний, теоретично обґрунтований підхід, на основі якого розроблено алгоритми, складовою частиною яких, як правило, є  $r$ -алгоритм Н. З. Шора або його модифікації.

Найменш вивченими на сьогоднішній день є задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, зокрема, задачі, в яких ряд параметрів є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі. Такі моделі відносять до нечітких задач ОРМ, для їх розв'язання потрібна розробка спеціальних підходів і методів.

У даній роботі запропоновано алгоритм розв'язання неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини  $\Omega$  з  $n$ -вимірному евклідовому простору  $E_n$  на її підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються (серед яких можуть бути і порожні), з відшукуванням координат центрів  $\tau_1, \dots, \tau_N$  цих підмножин, при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Алгоритм заснований на застосуванні нейронечітких технологій та  $r$ -алгоритму Н.З. Шора.

Наведемо спочатку математичну постановку цієї задачі з [1] з чіткими параметрами у цільовому функціоналі.

**Задача А.** Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_n\})} \left[ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \right] \quad (1)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N \quad (2)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N, \tag{3}$$

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N,$$

де  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset E_n$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ; функції  $c(x, \tau_i)$  – обмежені, визначені на  $\Omega \times \Omega$ , вимірні за аргументом  $x$  при будь-якому фіксованому  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$  для всіх  $i = 1, \dots, N$ ; координати  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центру  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , заздалегідь невідомі (які потрібно визначити);  $\rho(x)$  – обмежені, вимірні, невід’ємні на  $\Omega$  функції;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  – задані невід’ємні числа, причому

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок  $\Omega_i, i = 1, \dots, N$ , дорівнює нулю.

У роботах [2],[3] передбачалося, що для функцій  $\rho(x), c(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$ , відома явна аналітична залежність від їх аргументів. Однак на практиці ця залежність (як правило, складна нелінійна) не відома. В роботі [3] було запропоновано алгоритм розв’язання задачі (1), (3) з нейролінгвістичною ідентифікацією функції попиту  $\rho(x)$ . У даній роботі розглянемо випадок, коли параметри  $a_i, i = 1, \dots, N$ , у функціоналі (1) можуть бути нечіткими, неточними, недостовірними. Для зняття нечіткості в подальшому будемо використовувати нейронечіткі технології, описані в роботах [3]-[4].

Для цього параметри  $a_i, i = 1, \dots, N$ , представимо як параметри, що залежать від нечітких факторів  $\tilde{\gamma}_j, j = 1, \dots, n$ , у виді

$$\tilde{a}_i = a_i(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n). \tag{4}$$

Тоді задачу (1)-(3) можна записати з нечіткими параметрами у такому виді:

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + \tilde{a}_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \tau)} \tag{5}$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = p + 1, \dots, N, \tag{6}$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N. \tag{7}$$

**Нейролінгвістична ідентифікація нечітких параметрів  $\tilde{a}_i$ .**

Позначимо, для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації, кожний параметр  $a_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , як  $a$  та розглянемо функціональну залежність виходу  $a$  від входів  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  у виді:

$$a = a(\gamma), \text{ де } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (8)$$

Для задачі ідентифікації передбачаються відомими:

1) області визначення входів і область зміни виходу для (8):

$$\Upsilon_i = [\gamma_{\min_i}, \gamma_{\max_i}] - \text{області визначення вхідних змінних } \gamma_i, \quad (9)$$

$i = 1, \dots, n$ ,

$$A = [a_{\min}, a_{\max}] - \text{область зміни вихідної змінної } a; \quad (10)$$

2) експертно-експериментальна інформація про залежність (8) у вигляді вибірки з  $M$  пар даних про входи та вихід об'єкта  $\{\gamma_{\text{exp}}^{(m)}, a_{\text{exp}}^{(m)}\}$ , де

$$\gamma_{\text{exp}}^{(m)} = \{\gamma_{1\text{exp}}^{(m)}, \gamma_{2\text{exp}}^{(m)}, \dots, \gamma_{n\text{exp}}^{(m)}\} - \text{вхідний вектор в } m\text{-ій парі, } m = \overline{1, M}.$$

Нейролінгвістична ідентифікація складної, як правило нелінійної, функціональної залежності (8) складається з двох етапів:

**перший етап** - побудова нечіткої моделі об'єкта (8) у вигляді нечіткої продукційної моделі за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язок виходу  $a$  та входів  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , як узгодженої множини окремих нечітких продукційних правил виду «ЯКЩО - ТО»;

**другий етап** - настройка параметрів нечіткої моделі з метою мінімізації відхилення результатів моделювання від експериментальних даних.

Далі коротко опишемо перший етап методу нейролінгвістичної ідентифікації - побудову нечіткої продукційної моделі, використовуючи деякі необхідні для цього поняття теорії нечітких множин і нечіткої логіки з [4].

Типова структура процесу побудови нечіткої продукційної моделі об'єкта (8) з декількома входами і одним виходом складається з таких блоків: фазифікація, нечітке логічне виведення, дефазифікація. Опишемо ці блоки.

**Блок фазифікації.** Для знаходження залежності (8) в явному вигляді будемо розглядати вхідні змінні і вихідну змінну як лінгвістичні змінні, задані на універсальних множинах (9) - (10).

У контексті нечіткої логіки під фазифікацією розуміється процедура визначення терм-множин вхідних та вихідної змінних з відповідними функціями належності для кожного терму.

У даної залежності (8) для оцінки лінгвістичних змінних  $a$  та  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , будемо використовувати терми з таких терм-множин:

$D = \{D_k\}$  - терм-множина змінної  $a$ , де  $D_k$  -  $k$ -й лінгвістичний терм змінної  $a$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ ,  $L$  - число різних класів виходу  $a$ . Для кожного класу  $D_k$  доберемо «найхарактернішого представника»  $d_k \in D_k$  і назвемо його центром класу;

$\Gamma_i = \{\Gamma_{ir}\}$  - терм-множина змінної  $\gamma_i$ , де  $\Gamma_{ir}$  -  $r$ -й лінгвістичний терм змінної  $\gamma_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ,  $r=1,2,\dots,p_i$ ,  $p_i$  - кількість термів в терм-множині  $\Gamma_i$  змінної  $\gamma_i$ . Причому, у загальному випадку,  $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$ .

Значення лінгвістичних термів  $D_k$  і  $\Gamma_{ir}$  отримаємо на основі експертно-лінгвістичної інформації про об'єкт, що моделюється.

Лінгвістичні терми  $\Gamma_{ir} \in \Gamma_i$  і  $D_k \in D$  розглядаються як нечіткі множини, задані на універсальних множинах  $\Upsilon_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , та  $A$ , відповідно, визначених у (9)-(10). Кожний з нечітких термів  $\Gamma_{ir} \in \Gamma_i$  представляє відповідну нечітку підмножину на множині значень  $\gamma_i$ . А кожен нечітку множини, у свою чергу, задамо її дзвоноподібною функцією належності  $\mu_{ir}(\gamma_i)$ , яку представимо у виді

$$\mu_{ir}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\gamma_i - b_{ir}}{c_{ir}} \right)^2}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad r=1,2,\dots,p_i, \quad (11)$$

де  $\mu_{ir}(\gamma_i)$  - число у діапазоні  $[0,1]$ , яке характеризує суб'єктивну міру відповідності значення  $\gamma_i$  нечіткому терму  $\Gamma_{ir}$ ;  $b_{ir}$  і  $c_{ir}$  - параметри, які спочатку обираються експертом, а потім (2-й етап побудови нечіткої моделі) настроюються на експериментальні дані:  $b_{ir}$  - координата максимуму функції  $\mu_{ir}(\gamma_i)$ , причому  $\mu_{ir}(b_{ir})=1$ ,  $c_{ir}$  - коефіцієнт концентрації-розтягування функції  $\mu_{ir}(\gamma_i)$ .

Таким чином, на виході блоку фазифікації є заданими функції належності  $\mu_{ir}(\gamma_i)$  для кожного лінгвістичного терму  $\Gamma_{ir}$  з терм-множини  $\Gamma_i$  відповідної вхідної змінної  $\gamma_i$ .

*Блок нечіткого логічного виведення.* На вході цей блок отримує з попереднього блоку ступінь належності значень вхідних змінних конкретним нечітким множинам (термам), тобто значення  $\mu_{ir}(\gamma_i)$ , та на його виході обчислюється результуюча функція належності вихідного значення моделі  $\mu_{res}(a)$ . Ця функція має складну форму і визначається за допомогою алгоритму нечіткого логічного виведення. Для виконання обчислень блок виведення повинен включати наступні компоненти: базу нечітких продукційних логічних правил, алгоритм нечіткого логічного виведення, функції належності  $\mu_{D_k}(a)$  для кожного терму  $D_k$  з терм-множини  $D$  вихідної змінної  $a$ .

Далі представимо відому експертно-експериментальну інформацію про об'єкт (8) у вигляді системи нечітких продукційних логічних правил виду «ЯКЩО - ТО».

Тоді функцію належності вихідної змінної  $a$  класу  $D_k$  побудуємо на підставі наявності залежності (8) і застосування принципу узагальнення Заде теорії нечітких множин у вигляді:

$$\begin{aligned} \mu_{D_k}(a) &= (\mu_{11}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{21}^k(\gamma_2) \wedge \dots \wedge \mu_{n1}^k(\gamma_n)) \\ &\dots\dots \\ &\vee (\mu_{1j}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{2j}^k(\gamma_2) \wedge \dots \wedge \mu_{nj}^k(\gamma_n)) \\ &\dots\dots \\ &\vee (\mu_{1s_k}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{2s_k}^k(\gamma_2) \wedge \dots \wedge \mu_{ns_k}^k(\gamma_n)), \quad k=1,2,\dots,L. \end{aligned} \quad (12)$$

Замінімо в (12) операцію нечіткого «ТА» ( $\wedge$ ) в кожному  $j$ -ому,  $j=1,2,\dots,s_k$ , правилі добутком і отримаємо:

$$\mu_{1j}^k(\gamma_1) \wedge \mu_{2j}^k(\gamma_2) \wedge \dots \wedge \mu_{nj}^k(\gamma_n) = \mu_{1j}^k(\gamma_1) \cdot \mu_{2j}^k(\gamma_2) \cdot \dots \cdot \mu_{nj}^k(\gamma_n) = \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k(\gamma_i), \quad (13)$$

$$j=1,2,\dots,s_k, k=1,2,\dots,L,$$

тоді вираз для  $\mu_{D_k}(a)$  з (12), із урахуванням (13), перепишемо у виді

$$\mu_{D_k}(a) = \prod_{i=1}^n \mu_{i1}^k(\gamma_i) \vee \dots \vee \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k(\gamma_i) \vee \dots \vee \prod_{i=1}^n \mu_{is_k}^k(\gamma_i), \quad (14)$$

$$\text{де } \mu_{ij}^k(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\gamma_i - b_{ij}^k}{c_{ij}^k} \right)^2}, \quad i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,s_k, k=1,2,\dots,L. \quad (15)$$

Крім того, для досягнення більшої гнучкості моделі, поставимо у відповідність кожному правилу число  $w_j^k \in [0,1]$ , яке означає ступінь достовірності  $j$ -го правила для  $k$ -го класу. Тоді, при урахуванні (13), вихід  $j$ -го правила будемо визначати за формулами:

$$p_j^k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = w_j^k \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k(\gamma_i), \quad j=1,2,\dots,s_k, k=1,2,\dots,L. \quad (16)$$

Замінімо в (14) операцію нечіткого «АБО» ( $\vee$ ) сумою з урізанням значення до одиниці і, враховуючи (16), вихід класу правил будемо обчислювати за формулами:

$$\mu_{D_k}(a) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \leq 1, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (17)$$

$$k=1,2,\dots,L.$$

**Блок дефазифікації.** Для отримання точного (чіткого) значення вихідної змінної будемо застосовувати дискретний аналог методу центру тяжіння [4]:



$$a = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \mu_{D_k}(a)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}(a)} \quad . \quad (18)$$

Таким чином, ми побудували нечітку модель об'єкта (8) у вигляді співвідношень (15) - (18), структура якої відповідає експертній нечіткій базі знань і грубо описує шукану залежність (8).

Напишемо побудовану нечітку модель у вигляді

$$a = F(\gamma, B, C, W), \quad (19)$$

тут  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  – вхідний вектор,  $W = \{w_j^k\}$ ,  $w_j \in [0;1]$ ,  $j = 1, \dots, s_k$ , набір вагових коефіцієнтів правил,  $B = \{b_{ij}^k\}$ ,  $b_{ij}^k \in [b_{\min_i}; b_{\max_i}]$ ,  $b_{\min_i} = \min_m(\gamma^{(m)}_{i_{\text{exp}}})$ ,  $b_{\max_i} = \max_m(\gamma^{(m)}_{i_{\text{exp}}})$ ,  $C = \{c_{ij}^k\}$ ,  $c_{ij} \in [0; +\infty]$  – набори параметрів настройки функцій належності (17),  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ ;  $F$  – функція зв'язку входи-вихід, яка включає наведені вище перетворення.

Якщо побудована модель (19) недостатньо точно описує модельований об'єкт (8), то необхідно настроїти її, тобто знайти такі параметри  $B, C, W$ , які мінімізують відхилення модельних (теоретичних, отриманих за моделлю (19)) від експериментальних даних.

Перейдемо до *другого етапу* - настройки нечіткої моделі (19). Тоді в термінах математичного програмування задача настройки нечіткої моделі може бути сформульована таким чином:

знайти вектор  $(B, C, W)$ , який забезпечує

$$\|F(\gamma_{\text{exp}}, B, C, W) - a_{\text{exp}}\| \rightarrow \min_{B, C, W} \quad . \quad (20)$$

Позначимо вектор  $\psi = (B, C, W)$ ,  $\psi \in Q = \{Q_1 \times \dots \times Q_i \times \dots \times Q_n\}$ , де  $Q_i = [b_{\min_i}; b_{\max_i}] \times [0; +\infty] \times [0; 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , та перепишемо задачу оптимізації (20) у виді

$$f(\psi) \rightarrow \min_{\psi \in Q} \quad , \quad (21)$$

де  $f(\psi) = \|a - a_{\text{exp}}\|$ ,  $a$  – результати, які розраховані за моделлю (19),  $a_{\text{exp}}$  – експериментальні дані.

Тут норма  $\|\cdot\|$  визначається як евклідова метрика

$$\|a - a_{\text{exp}}\| = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a_{\text{exp}}^{(m)})^2} \quad , \quad (22)$$

де  $a^{(m)}_{\text{exp}}$  – значення вихідної змінної  $a$  з  $m$ -ої пари експериментальної вибірки  $\{\gamma^{(m)}_{\text{exp}}, a^{(m)}_{\text{exp}}\}$ ,  $m=1, \dots, M$ ;  $a^{(m)}$  – результати, розраховані за моделлю (15)-(18) для значень вхідних змінних  $\gamma$  з  $m$ -ої пари експериментальної вибірки.

Для розв'язання задачі оптимізації (21) будемо застосовувати  $r$ -алгоритм Н.З.Шора в  $H$ -формі [1], з ітераційною формулою у виді

$$\psi^{(k+1)} = P_Q \left[ \psi^{(k)} - h_k \frac{H_k g_f(\psi^{(k)})}{\sqrt{(H_k g_f(\psi^{(k)}), g_f(\psi^{(k)}))}} \right], \quad k=0,1,2,\dots \quad (23)$$

де  $P_Q$  - оператор проектування на  $Q$ ,  $h_k \geq 0$  - кроковий множник;  $g_f(\psi^{(k)})$  - субградієнт цільової функції  $f(\psi)$  з (21) у точці  $\psi = \psi^{(k)}$ , який розраховується для  $\forall k, i, j, m: k=1, \dots, L, i=1, \dots, n, j=1, \dots, s_k, m=1, \dots, M$ , за такими формулами:

$$g_f(\psi^{(k)}) = (g_f^B(\psi^{(k)}), g_f^C(\psi^{(k)}), g_f^W(\psi^{(k)})),$$

$$g_f^{w_j^k}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a^{(m)}_{\text{exp}})^2}} \cdot (a^{(k)} - a^{(k)}_{\text{exp}}) g_a^{w_j^k}(a^{(k)}),$$

$$g_f^{b_{ij}^k}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a^{(m)}_{\text{exp}})^2}} \cdot \sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a^{(m)}_{\text{exp}}) g_a^{b_{ij}^k}(a^{(m)}),$$

$$g_f^{c_{ij}^k}(\psi^{(k)}) = \frac{1}{M \sqrt{\sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a^{(m)}_{\text{exp}})^2}} \cdot \sum_{m=1}^M (a^{(m)} - a^{(m)}_{\text{exp}}) g_a^{c_{ij}^k}(a^{(m)}),$$

$$g_a^{w_j^k}(a^{(k^*)}) = \frac{d_k^* g_{\mu_{D_k}}^{w_j^k}(a^{(k^*)}) \sum_{k=1}^L \mu_{D_k}(a^{(k^*)}) - g_{\mu_{D_k}}^{w_j^k}(a^{(k^*)}) \sum_{k=1}^L d_k \mu_{D_k}(a^{(k^*)})}{\left( \sum_{k=1}^L \mu_{D_k}(a^{(k^*)}) \right)^2},$$

$$g_a^{b_{ij}^k}(a^{(m)}) = \frac{\sum_{k=1}^L g_{\mu_{D_k}}^{b_{ij}^k}(a^{(m)}) d_k \sum_{k=1}^L \mu_{D_k}(a^{(m)}) - \sum_{k=1}^L g_{\mu_{D_k}}^{b_{ij}^k}(a^{(m)}) \sum_{k=1}^L d_k \mu_{D_k}(a^{(m)})}{\left( \sum_{k=1}^L \mu_{D_k}(a^{(m)}) \right)^2},$$

$$g_a^{c_{ij}^k} (a^{(m)}) = \frac{\sum_{k=1}^L g_{\mu_{D_k}}^{c_{ij}^k} (a^{(m)}) d_k \sum_{k=1}^L \mu_{D_k} (a^{(m)}) - \sum_{k=1}^L g_{\mu_{D_k}}^{c_{ij}^k} (a^{(m)}) \sum_{k=1}^L d_k \mu_{D_k} (a^{(m)})}{\left( \sum_{k=1}^L \mu_{D_k} (a^{(m)}) \right)^2},$$

$$g_{\mu_{D_k}}^{w_j^k} (a^{(k)}) = \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k (a_i^{(k)}),$$

$$g_{\mu_{D_k}}^{b_{i^*j^*}^k} (a^{(m)}) = \sum_{j=1..s_k} w_j^k \prod_{\substack{i=1 \\ j^* \neq j}}^n \mu_{ij}^k (a_i^{(m)}) g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{b_{i^*j^*}^k} (a_i^{(m)}),$$

$$g_{\mu_{D_k}}^{c_{i^*j^*}^k} (a^{(m)}) = \sum_{j=1..s_k} w_j^k \prod_{\substack{i=1 \\ j^* \neq j}}^n \mu_{ij}^k (a_i^{(m)}) g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{c_{i^*j^*}^k} (a_i^{(m)}),$$

$$g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{b_{i^*j^*}^k} (a_i^{(m)}) = \frac{2 \cdot \left( c_{i^*j^*}^k \right)^2 \left( a_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^k \right)}{\left( \left( c_{i^*j^*}^k \right)^2 + \left( a_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^k \right)^2 \right)^2},$$

$$g_{\mu_{i^*j^*}^k}^{c_{i^*j^*}^k} (a_i^{(m)}) = \frac{2 \cdot c_{i^*j^*}^k \left( a_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^k \right)^2}{\left( \left( c_{i^*j^*}^k \right)^2 + \left( a_i^{(m)} - b_{i^*j^*}^k \right)^2 \right)^2}.$$

Зауважимо, що  $r$ -алгоритм є методом розв'язання задач безумовної оптимізації. В залежності від вигляду функцій належності термів для нечітких змінних моделі при використанні  $r$ -алгоритму необхідно ввести до цільового функціоналу негладкі штрафи та врахувати їх при розрахунку його градієнту.

У даній задачі обмеження для параметра  $B$ , що наведені вище, додаються до цільового функціоналу у вигляді негладкої штрафної функції

$$-S \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^{s_k} \left( \max \left( 0, b_{\min_i}^k - b_{ij}^k \right) + \max \left( 0, b_{ij}^k - b_{\max_i}^k \right) \right), \quad \text{обмеження для}$$

параметра  $C$  - у вигляді негладкої штрафної функції

$$-S \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^{s_k} \max \left( 0, -c_{ij}^k \right), \quad \text{а для параметра } W - \text{ у вигляді негладкої штрафної}$$

функції  $-S \cdot \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^{s_k} \left( \max \left( 0, -w_j^k \right) + \max \left( 0, w_j^k - 1 \right) \right)$ , де  $S$  - велике додатне число

(значно більше максимального з множників Лагранжа для цільового функціоналу).

У результаті розв'язання задачі оптимізації (21) отримуємо вектор  $\psi^* = (B^*, C^*, W^*)$ , який доставляє мінімальне значення цільовій функції  $f(\psi)$ . Тобто отримуємо такі значення  $W^* = \{w_j^{k*}\}$  – для набору вагових коефіцієнтів правил і наборів параметрів  $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}, C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$  функцій належності (15), для яких відхилення виду (22) експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі, досягає мінімального значення.

Наведемо результуючу нейронечітку ідентифікацію залежності (8) у вигляді наступних співвідношень:

$$a(\gamma) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}^*(a)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(a)}, \quad \gamma \in \Upsilon = \Upsilon_1 \times \dots \times \Upsilon_i \times \dots \times \Upsilon_n, \quad (24)$$

де

$$\mu_{D_k}^*(a) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \leq 1, \\ 1 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (25)$$

$$p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^{k*}(\gamma_i), \quad (26)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\gamma_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad k = 1, 2, \dots, L. \quad (27)$$

У співвідношеннях (24)-(27) значення  $\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i)$ ,  $p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ,  $\mu_{D_k}^*(a)$  розраховуються при оптимальних значеннях параметрів  $W^* = \{w_j^{k*}\}, B^* = \{b_{ij}^{k*}\}, C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$ , отриманих після настройки.

**Алгоритм розв'язання задачі з нейролінгвістичною ідентифікацією нечітких параметрів  $\tilde{a}_i$ .**

Для формулювання алгоритму розв'язання задачі (5)-(7) з нечіткими параметрами  $\tilde{a}_i, i = 1, \dots, N$ , перепишемо задачу А (з чіткими параметрами), вводячи характеристичну функцію

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

підмножини  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , у виді задачі В.

**Задача В.** Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = \{ & \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x \in \Omega; \\ & \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p + 1, \dots, N \}, \\ \Gamma_1 = \{ & \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N, \\ & \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega \}; \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N. \end{aligned}$$

Тут

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі **В** має наступний вигляд для  $i = 1, \dots, N$  та майже всіх  $x \in \Omega$  [1]:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ & i \neq j \text{ м.в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \text{ тоді } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

в якості  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  обирається оптимальний розв'язок задачі

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \quad (28)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p + 1, \dots, N, \quad (29)$$

де

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (30)$$

Для розв'язання скінченновимірної задачі (28) - (30) з недиференційовною функцією (30) застосуємо евристичний алгоритм псевдоградієнтів з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних градієнтів, близький до  $r$ -алгоритму Н.З. Шора [5].

Для цього від задачі (28), (29) перейдемо до задачі безумовної максимізації по  $\psi$  за допомогою введення в цільову функцію (30) негладкої штрафної функції множини  $\{\psi_i \geq 0, i = p + 1, \dots, N\}$ . Знайти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi),$$

$$P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i),$$

де  $S$  – досить велике додатне число (значно більше максимального з множників Лагранжа для функції (30)).

Визначимо  $i$ -ту,  $i=1, \dots, N$ , компоненту  $2N$ -вимірного вектора узагальненого псевдоградієнта

$$g_P(\tau, \psi) = \left( g_P^\tau(\tau, \psi), -g_P^\psi(\tau, \psi) \right) = \left( g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi) \right)$$

функції  $P(\tau, \psi)$  в точці  $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$  таким чином:

$$g_P^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i, & i = 1, \dots, p, \\ \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - b_i + S \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (31)$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \rho(x) g_c^{\tau_i}(\tau, x) \lambda_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (32)$$

де  $g_c^{\tau_i}(\tau, x)$  –  $i$ -а компонента  $N$ -вимірного вектора узагальненого градієнта  $g_c^{\tau}(\tau, x)$  функції  $c(x, \tau_i)$  в точці  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$  при фіксованому  $x$ , яка має вид

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

У формулах (31), (32)  $\lambda_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , визначається наступним чином:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \\ & i \neq j \text{ п. в. для } x \in \Omega, j = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (33)$$

Опишемо алгоритм розв’язання задачі (5)-(7).

**Алгоритм.**

Область  $\Omega$  укладаємо в  $n$ -вимірний паралелепіпед  $\Pi$ , сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо  $\rho(x) = 0$  для  $x \in \Pi \setminus \Omega$ . Паралелепіпед  $\Pi$  покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення  $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ . Обчислюємо значення  $\lambda^{(0)}(x)$  у вузлах сітки за формулами (33) при  $\tau = \tau^{(0)}$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$  та  $a_i, i = 1, \dots, N$ , які

обчислені за формулами (24)-(27), де в якості  $a$  взяті відповідні  $a_i, i=1, \dots, N$ . Обчислюємо значення  $g_P^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ ,  $g_P^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$  у вузлах сітки за формулами (31) та (32) при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ ,  $\psi = \psi^{(0)}$ , та  $a_i, i=1, \dots, N$ , які обчислені за формулами (24)-(27), вибираємо початковий пробний крок  $h_0 > 0$   $r$ -алгоритму та знаходимо

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= P_{\Pi} \left( \tau^{(0)} - h_0 g_P^\tau(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}) \right), \\ \psi^{(1)} &= \psi^{(0)} - h_0 g_P^\psi(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}),\end{aligned}$$

де  $P_{\Pi}$  – оператор проектування на  $\Pi$ .

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після  $k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , кроків алгоритму отримані певні значення  $\tau^{(k)}, \psi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ , у вузлах сітки.

Опишемо  $(k+1)$ -й крок.

1. Обчислюємо значення  $\lambda^{(k)}(x)$  у вузлах сітки за формулами (33) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$  та  $a_i, i=1, \dots, N$ , які обчислені за формулами (24)-(27).

2. Обчислюємо значення  $g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$  за формулами (31), (32) при  $\tau = \tau^{(k)}, \psi = \psi^{(k)}$ ,  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$  та  $a_i, i=1, \dots, N$ , які обчислені за формулами (24)-(27).

3. Проводимо  $(k+1)$ -й крок алгоритму узагальнених псевдоградієнтів з розтягуванням простору, близького до  $r$ -алгоритму [5], коротка схема якого має вигляд

$$\begin{aligned}\tau^{(k+1)} &= P_{\Pi} \left( \tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^\tau \tilde{g}_P^\tau \right), \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} - h_k B_{k+1}^\psi \tilde{g}_P^\psi,\end{aligned}$$

де  $B_{k+1}^\tau, B_{k+1}^\psi$  – оператори відображення перетвореного простору в основний простір  $E_n$ , причому  $B_0^\tau = I_N$ ,  $B_0^\psi = I_N$  ( $I_N$  – одинична матриця);  $\tilde{g}_P = B_{k+1}^* g_P(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ ;  $h_k$  – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови мінімуму різниці

$$\left[ G_1(\tau^{(k-1)}, \psi^{(k)}) - G_1(\tau^{(k)}, \psi^{(k-1)}) \right]$$

у напрямку антипсевдоградієнта  $-g(\tau, \psi)$  у перетвореному просторі.

4. Якщо умова

$$\left\| \left( \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) - \left( \tau^{(k)}, \psi^{(k)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (34)$$

не виконується, переходимо до  $(k+2)$ -го кроку алгоритму, якщо виконується - то до п. 5.

5. Вважаємо  $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi_* = \psi^{(l)}, \lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ , де  $l$  – номер ітерації, на

якій виконалася умова (34).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (30) при  $\tau = \tau_*$ ,  $\psi = \psi^*$  та  $a_i, i = 1, \dots, N$ , які обчислені за формулами (24)-(27), й, для контролю правильності розрахунків, за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot), \tau_*) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_{*i}) + a_i] \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx. \quad (35)$$

Алгоритм описаний.

**Висновки.** У роботі розроблено алгоритм розв'язання неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини  $\Omega$  з  $n$ -вимірного евклідового простору  $E_n$  на підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  з відшукуванням координат центрів (з розташуванням центрів)  $\tau_1, \dots, \tau_N$  цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри. Алгоритм заснований на застосуванні нейронечітких технологій та  $r$ -алгоритму Н.З.Шора. Розроблений алгоритм дозволяє розв'язувати задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності, зокрема, задачі, в яких ряд параметрів є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі.

#### Бібліографічні посилання

1. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. - 564 с.
2. **Киселева Е.М.** Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств  $n$ -мерного Евклидова пространства. Теоретические и практические приложения [Текст] / Е.М. Киселева // Проблемы управления и информатики, 2018. - №5. – С. 114-135.
3. **Elena M. Kiseleva** Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional [Text] / Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 50, 2018, Issue 3, pp. 1-20. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.
4. **Elena M. Kiseleva.** Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies [Text] / Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 48, 2016, Issue 9, pp. 1-22. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
5. **Шор Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения [Текст] / Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.

Надійшла до редколегії 11.10.2018.



**О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара**  
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ LOCATION-ALLOCATION ІЗ НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Сформульовано нескінченновимірну задачу location-allocation з нечіткими параметрами. Розроблено програмне забезпечення, що реалізує алгоритм її розв'язання на основі нейронечітких технологій з використанням  $r$ -алгоритму Шора. Викладено результати розрахунків для модельної задачі location-allocation з нечіткими параметрами, які отримано за допомогою розробленого програмного забезпечення.

**Ключові слова:** задача location-allocation, оптимізація, нечіткий параметр, нейронечіткі технології,  $r$ -алгоритм.

Сформулирована бесконечномерная задача location-allocation с нечеткими параметрами. Разработано программное обеспечение, которое реализует ее решение на основе нейронечетких технологий с использованием  $r$ -алгоритма Шора. Приведены результаты для модельной задачи location-allocation с нечеткими параметрами, которые получены с помощью разработанного программного обеспечения.

**Ключевые слова:** задача location-allocation, оптимизация, нечеткий параметр, нейронечеткие технологии,  $r$ -алгоритм.

The problem of enterprises location with the simultaneous allocation of this region, continuously filled by consumers, into consumer areas, where each of them is served by one enterprise, in order to minimize transportation and production costs, in the mathematical definition, are illustrated as infinite-dimensional optimal set partitioning problems (OSP) in non-intersecting subsets with the placement of centers of these subsets. A wide range of methods and algorithms have been developed to solve practical tasks of location-allocation, both finite-dimensional and infinite-dimensional. However, infinite-dimensional location-allocation problems are significantly complicated in uncertainty, in particular case when a number of their parameters are fuzzy, inaccurate, or an unreliable mathematical description of some dependencies in the model is false. Such models refer to the fuzzy OSP tasks, and special solutions and methods are needed to solve them. This paper is devoted to the solution of an infinite-dimensional problem of location-allocation with fuzzy parameters, which in mathematical formulation are defined as continuous linear single-product problem of  $n$ -dimensional Euclidean space  $E_n$  optimal set partitioning into a subset with the search for the coordinates of the centers of these subsets with constraints in the form of equalities and inequalities whose target functionality has fuzzy parameters. The software to solve the illustrated problem was developed. It works on the basis of neuron-fuzzy technologies with  $r$ -algorithm of Shore application. The object-oriented programming language C# and the Microsoft Visual Studio development environment were used. The results for a model-based problem of location-allocation with fuzzy parameters obtained in developed software are presented. The results comparison for the solution to solve the infinite-dimensional problem of location-allocation with defined parameters and for the case where

some parameters of the problem are inaccurate, fuzzy or their mathematical description is false.

**Keywords:** location-allocation problem, optimization, fuzzy parameter, neuro-fuzzy technologies, r-algorithm.

**Вступ.** Задачі розміщення (location) підприємств з одночасним розбиттям (allocation) даного регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, кожна з яких обслуговується одним підприємством, з метою мінімізації транспортних і виробничих витрат у математичній постановці зводяться до нескінченновимірних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) на неперетинні підмножини з розміщенням центрів цих підмножин [1,2].

Необхідність в розгляді нескінченновимірних задач розміщення виникає тоді, коли споживачів «дуже багато», наприклад, в задачах про телефонних, радіо-, телеабонентів, про шкільні регіони, про виборчі округи і тому подібне, і формулювання задачі розміщення як дискретної математичної моделі стає недоцільною через труднощі, пов'язані з розв'язанням задач надмірно великої розмірності.

Для розв'язання практичних задач location-allocation, як скінченновимірних, так і нескінченновимірних, розроблено значну кількість методів і алгоритмів, серед яких вкажемо на підхід, запропонований в роботі [3], де автор надав також і огляд літератури з підходів, методів і алгоритмів розв'язання задач location-allocation у чітких умовах. Однак, нескінченновимірні задачі location-allocation суттєво ускладнюються в умовах невизначеності, зокрема, коли ряд їх параметрів є нечіткими, неточними, або є недостовірним математичний опис деяких залежностей в моделі. Такі моделі відносять до нечітких задач ОРМ, для їх розв'язання потрібна розробка спеціальних підходів і методів.

Дана робота присвячена розв'язанню однієї нескінченновимірної задачі location-allocation з нечіткими параметрами, яка у математичній постановці зводиться до неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини з  $n$ -вимірною евклідовою простору  $E_n$  на підмножини з відшукуванням координат центрів цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри.

Алгоритм розв'язання цієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі запропонований у роботі [4].

Застосуємо цей алгоритм для розв'язання модельної нескінченновимірної задачі location-allocation з нечіткими параметрами.

**Постановка задачі.** Розглянемо спрощену модель нескінченновимірної задачі розміщення виробництва, що називається в зарубіжній науковій літературі задачею location-allocation [3], в наступній постановці.

Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області  $\Omega \subset E_2$ . Скінченне число  $N$  виробників цієї продукції розташовані в

ізолюваних точках  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , області  $\Omega$ . Вважаються заданими:  $\rho(x)$  – попит на продукцію споживача з координатами  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ;  $c(x, \tau_i)$  – вартість транспортування одиниці продукції від виробника  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$  споживачеві з координатами  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ . Передбачається, що прибуток виробника залежить тільки від його витрат, які є сумою виробничих і транспортних витрат.

Для кожного  $i$ -го виробника задана функція  $\varphi_i(Y_i)$ , що описує залежність вартості виробництва від його потужності  $Y_i$ , яка визначається за формулою  $Y_i = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx$ , і наведені капітальні витрати на реконструкцію  $i$ -го виробника для збільшення його потужності від існуючої до проектної  $Y_i$ .

Множину споживачів  $\Omega$  можна розбивати на зони обслуговування  $\Omega_i$  споживачів  $i$ -м виробником так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N. \quad (1)$$

При цьому потужність  $i$ -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать  $\Omega_i$ , і не перевищує заданих обсягів:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

не виключається, що деякі з підмножин  $\Omega_i$  виявляться порожніми.

Потрібно розбити множину споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування їх  $N$  виробниками, тобто на підмножини  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , і розмістити цих виробників в  $\Omega$  так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживачів:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx + \varphi_i \left( \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) \right\} \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \quad (3)$$

за умов (1), (2).

Задача (1)-(3) – нескінченновимірна задача location-allocation в чітких умовах.

У більшості практичних задач вартість виробництва продукції на промисловому підприємстві потужності  $Y_i$  дорівнює добутку собівартості цієї продукції на її кількість. В силу цього маємо:

$$\varphi_i(Y_i) = d_i + a_i Y_i, i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Підставляючи вираз (4) в (3) отримаємо

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})}. \quad (5)$$

Задача (1)-(5) при  $a_i = 0, i = 1, \dots, N$ , – нескінченновимірна транспортна задача, при  $a_i \geq 0, i = 1, \dots, N$ , – нескінченновимірна задача location-allocation.

Для сформульованої модельної задачі (1)-(5) розглянемо випадок, коли  $N = 5$  і параметри  $a_i, i = 1, \dots, 5$ , можуть бути нечіткими, неточними, недостовірними.

Параметр  $a_i$  можна представити, наприклад, як параметр, що залежить від трьох нечітких факторів  $\tilde{\gamma}_j, j = 1, 2, 3$ , у вигляді

$$\tilde{a}_i = a_i(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3), i = 1, \dots, 5. \quad (6)$$

Тоді задачу (1)-(5) можна записати з нечіткими параметрами в наступному виді:

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + \tilde{a}_i) \rho(x) dx \rightarrow \min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_5\}, \{\tau_1, \dots, \tau_5\})} \quad (7)$$

за умов

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, 5, \quad (8)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, i = 1, \dots, 5. \quad (9)$$

Задача (7)-(9) є *задачею location-allocation з нечіткими параметрами*.

**Розв'язання задачі location-allocation.** Для розв'язання задачі (7)-(9) застосуємо алгоритм, запропонований в роботі [4], та проілюструємо його на наступній модельній задачі.

Нехай задана множина  $\Omega = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in E_2 : 0 \leq x^{(1)} \leq 1; 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$  споживачів однорідної продукції, яка може вироблятися п'ятьма пунктами виробництва. Вартість транспортування одиниці продукції з  $i$ -го,  $i = \overline{1, 5}$ , підприємства до споживача  $(x^{(1)}, x^{(2)})$  задається наступним чином:

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x^{(1)} - \tau_i^{(1)})^2 + (x^{(2)} - \tau_i^{(2)})^2}.$$

Попит на продукцію  $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \equiv 1 \quad \forall (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$ . При цьому потужність  $i$ -го виробника визначається сумарним попитом споживачів, що належать  $\Omega_i$ , і не перевищує заданих обсягів  $b_i = 1, i = 1, \dots, 5$ .

Потрібно розбити множину споживачів  $\Omega$  на їх зони обслуговування  $\Omega_i$ , п'ятьма підприємствами за умов (8)-(9) і розмістити ці підприємства в області  $\Omega$  так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживача (5) при  $N = 5$  та заданих чітких значеннях параметрів  $a_i, i = 1, \dots, 5$ .

На практиці часто параметр  $a_i$  (витрати  $i$ -го підприємства на випуск одиниці продукції, тобто коефіцієнт змінних витрат) розраховують як лінійну

комбінацію факторів, які пливають на нього. Ураховуючи (6) будемо розглядати такі фактори:

$\gamma_1$  - вартості засобів виробництва (виробничі потужності та засоби праці);

$\gamma_2$  - вартості трудових ресурсів;

$\gamma_3$  - вартості природних ресурсів (сировинних і енергетичних).

Обчислення параметрів  $a_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ , як чітких значень, проводять за формулою:

$$a_i = k_{i1}\gamma_1 + k_{i2}\gamma_2 + k_{i3}\gamma_3. \quad (10)$$

Нехай для деяких точних значень  $k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (де  $k_{ij}$  - вагові коефіцієнти, значення факторів  $\gamma_i$  вимірюються в умовних одиницях,  $j=1, 2, 3, i=1, \dots, 5$ ) з (10) отримані наступні чіткі значення параметрів:  $a_1 = 0,07$ ;  $a_2 = 0,1$ ;  $a_3 = 0,38$ ;  $a_4 = 0,2$ ;  $a_5 = 0$ .

Для розв'язання цієї модельної задачі location-allocation з чіткими значеннями параметрів  $a_i$  був застосований алгоритм з [1]. Для цього множина  $\Omega$  покривалася прямокутною сіткою з вузлами  $(i, j)$ ,  $i=1, \dots, 21, j=1, \dots, 21$ . В якості початкових значень двоїстих змінних задані  $\psi_i^{(0)} = 0, i=1, \dots, 5$ .

Умовою припинення обчислень було виконання нерівності:

$$\|(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

В результаті роботи алгоритму з [1] за 46 ітерацій отримані:

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі 0,26722;
- мінімальне значення функціоналу прямої задачі 0,26789.

Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування кожним підприємством представлено на рис. 1, точками позначені оптимальні координати розташованих підприємств:

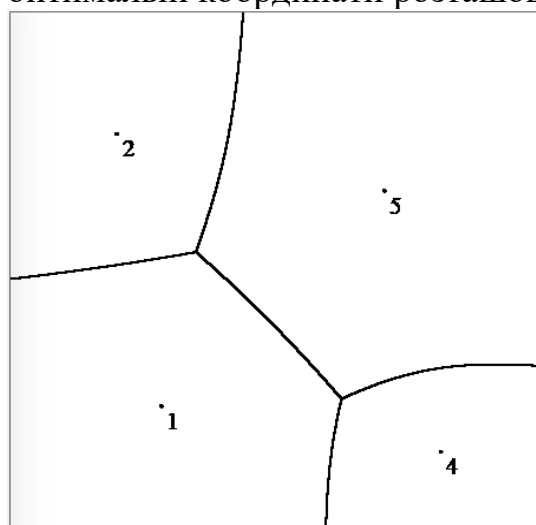


Рис.1.

*Оптимальні координати розташованих підприємств:*

$$\tau_1 = (0,28439; 0,23794);$$

$$\tau_2 = (0,19985; 0,76565);$$

$$\tau_4 = (0,81255; 0,14963);$$

$$\tau_5 = (0,70583; 0,65526).$$

Цифрами на рис.1 позначені номери підмножин. Причому замість розбиття на п'ять підмножин оптимальним розбиттям виявилось розбиття на чотири

підмножини, одна підмножина  $\Omega_3$  виявилася пустою тому, що значення  $a_3$  є значно більшим  $a_i$ ,  $i=1,2,4,5$ .

Однак, реальні залежності параметрів  $a_i$  від факторів, що на них впливають, як правило складні, нелінійні або невідомі. Будемо застосовувати для відновлення значень параметрів  $a_i$  метод нейролінгвістичній ідентифікації, запропонований в роботах [5]. Потім знайдемо оптимальне рішення цієї модельної тестової задачі з відновленими значеннями параметрів  $a_i$  за допомогою алгоритму, запропонованого в роботі [4], і порівняємо його з отриманим вище оптимальним розв'язком задачі з чіткими параметрами  $a_i$ .

Далі опишемо відновлення значення параметра  $a_1$  за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації, запропонованого у роботі [6], та зауважимо, що значення параметрів  $a_2, \dots, a_5$  можуть бути відновлені аналогічно.

Для побудови математичної моделі залежності коефіцієнта змінних витрат  $a_1$  від факторів  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  по наявним даним, які наведені у табл. 1, розглянемо цю залежність у вигляді

$$a_1 = a_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \gamma_{\min_i} \leq \gamma_i \leq \gamma_{\max_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Таблиця 1

Вхідні дані для відновлення значення параметра  $a_1$ 

Номер у вибірці	$a_1$	Вхідні змінні			Номер у вибірці	$a_1$	Вхідні змінні		
		$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$			$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
1	0,38	15	12	11	5	0,15	5	4	10
2	0,10	7	9	7	6	0,17	1	5	12
3	0,00	3	1	8	7	0,07	4	3	4
4	0,20	11	12	15	8	0,10	9	7	5

Виконаємо *перший* етап методу нейролінгвістичної ідентифікації з [5].

*Фазифікація.* Для побудови термів для змінних  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  моделі, візьмемо відрізки, правою границею кожного з яких буде найбільше значення кожної змінної, а лівою – найменше. Розділимо це відрізки на три рівні частини, яким відповідатимуть нечіткі терми – *низький* (Н), *середній* (С), *високий* (В). Отримані відрізки наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Терми вхідних змінних

	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
Н	[0;5)	[0;4)	[0;5)
С	[5;10)	[4;8)	[5;10)
В	[10, 15]	[8, 12]	[10, 15]

Множину значень  $a_1$  було розділено на три класи  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  з центрами  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0,19$  и  $d_3 = 0,38$ , відповідно, таким чином, щоб до кожного класу потрапили близькі значення вихідної змінної  $a_1$ .

*Нечітке логічне виведення.* Сформуємо нечітку продукційну базу знань, яка є сукупністю нечітких експертно-лінгвістичних правил типу ЯКЦО-ТО, які зв'язують між собою лінгвістичні оцінки вхідних змінних ( $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ) та вихідної змінної  $a_1$ . Лінгвістичні оцінки будуть отримані на основі наведеної у табл. 3 статистичної інформації.

Виходячи з наявних даних, побудованих нами нечітких термів (табл. 2) та лінгвістичних висловлювань типу ЯКЦО-ТО можна побудувати нечітку базу знань, компактний вид якої представлено в табл. 3

Таблиця 3

Компактний вид бази знань

Номер класу вихідної змінної	Номер у вибірці	Номер правила, $p$	Вага правила до настройки, $w_p$	Вага правила після настройки, $w_p^*$	Вхідні змінні		
					$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
$k = 1$	3	1	1	0,99885	В	В	С
	7	2	1	0,28560	С	С	С
$k = 2$	2	3	1	0,74009	Н	Н	С
	4	4	1	0,22743	С	В	В
	5	5	1	0,28546	С	С	С
	6	6	1	0,62461	Н	С	В
	8	7	1	0,00552	Н	Н	Н
$k = 3$	1	8	1	0,28548	С	С	С

Таким чином, для побудови моделі (11) в явному вигляді побудована нечітка база знань як система нечітких лінгвістичних висловлювань типу «ЯКЦО-ТО», які зв'язують лінгвістичні оцінки («низький», «середній» та «високий») вхідних змінних з вихідною змінною  $a_1$ . Лінгвістичні оцінки «низький», «середній» та «високий» формалізуємо за допомогою функцій належності. Задамо ці функції у наступному вигляді

$$\mu_T(\gamma) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma - b}{c}\right)^2}, \quad (12)$$

де  $\mu^T(\gamma)$  - число у діапазоні  $[0,1]$ , яке характеризує суб'єктивну міру відповідності значення  $\gamma$  нечіткому терму  $T$  («низький», «нижчий за середнє» та ін.),  $b$  та  $c$  параметри, які спочатку вибираються експертом, а потім настроюються на експериментальні дані:  $b$  - координата максимуму функції  $\mu^T(\gamma)$ , причому  $\mu^T(b) = 1$ ,  $c$  - коефіцієнт концентрації – розтягнення функції  $\mu^T(\gamma)$ . Значення параметрів  $b$  і  $c$  для вхідних змінних  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  наведено у табл. 4.

Дефазифікація. Із [6] витікає, що нечіткій базі знань (табл. 3) відповідає наступне представлення об'єкту (11) у явному вигляді:

$$a_1 = \frac{\sum_{k=1}^3 d_k \cdot \mu_{D_k}(a_1)}{\sum_{k=1}^3 \mu_{D_k}(a_1)}, \tag{13}$$

$$\mu_{D_1}(a_1) = \min \left\{ 1, w_3 \mu_{1B}(\gamma_1) \mu_{2B}(\gamma_2) \mu_{3C}(\gamma_3) + w_7 \mu_{1C}(\gamma_1) \mu_{2C}(\gamma_2) \mu_{3C}(\gamma_3) \right\} \tag{14}$$

$$\mu_{D_2}(a_1) = \min \left\{ 1, w_2 \mu_{1H}(\gamma_1) \mu_{2H}(\gamma_2) \mu_{3C}(\gamma_3) + w_4 \mu_{1C}(\gamma_1) \mu_{2B}(\gamma_2) \mu_{3B}(\gamma_3) + w_5 \mu_{1C}(\gamma_1) \mu_{2C}(\gamma_2) \mu_{3C}(\gamma_3) + w_6 \mu_{1H}(\gamma_1) \mu_{2C}(\gamma_2) \mu_{3B}(\gamma_3) + w_8 \mu_{1H}(\gamma_1) \mu_{2H}(\gamma_2) \mu_{3H}(\gamma_3) \right\} \tag{15}$$

$$\mu_{D_3}(a_1) = \min \left\{ 1, w_1 \mu_{1B}(\gamma_1) \mu_{2B}(\gamma_2) \mu_{3C}(\gamma_3) \right\} \tag{16}$$

Тут  $w_p$  – число в діапазоні [0,1], яке характеризує суб'єктивну міру впевненості експерта відносно висловлювання з номером  $p$  з бази знань, тобто є вагою  $p$ -го правила.

Однак, як було зазначено вище, побудована нечітка модель (13)-(16) грубо описує шукану залежність (11), тому виконаємо другий етап методу нейролінгвістичній ідентифікації - настройку параметрів нечіткої моделі, описаний в [6].

На виході отримуємо оптимальні значення векторів параметрів  $W^*$ ,  $B^*$  і  $C^*$  для задачі мінімізації середньоквадратичного відхилення (критерій точності нечіткої моделі) експериментальних даних від модельних з [6], які представлені в табл. 4 для параметрів  $B^*$  і  $C^*$  та у табл. 3 для параметра  $W^*$ .

Таблиця 4

**Параметри функцій належності для термів вхідних змінних до та після настройки**

	до настройки						після настройки					
	$\gamma_1$		$\gamma_2$		$\gamma_3$		$\gamma_1$		$\gamma_2$		$\gamma_3$	
	$b$											
1	3,5	1	2,75	1	3,5	2.12	2.66	1.02	0.14	1.02	1.19	
8	3,5	6,5	2,75	8	3,5	7.72	0.07	3.80	0.38	8.59	0.83	
15	3,5	12	2,75	15	3,5	14.99	0.11	11.89	0.45	14.9	0.26	



Середньоквадратичне відхилення складає до настройки 0,1451, після настройки 0,00008.

На рис. 2.а представлені графіки модельних значень вихідної змінної  $a_1$ , отримані до настройки, а також для порівняння - експериментальні дані. На рис. 2.б представлені графіки модельних значень вихідної змінної  $a_1$ , отримані після настройки, та експериментальні дані.

Значення параметрів  $a_2, \dots, a_5$  знаходяться аналогічно методу, описаному для відновлення параметра  $a_1$ .

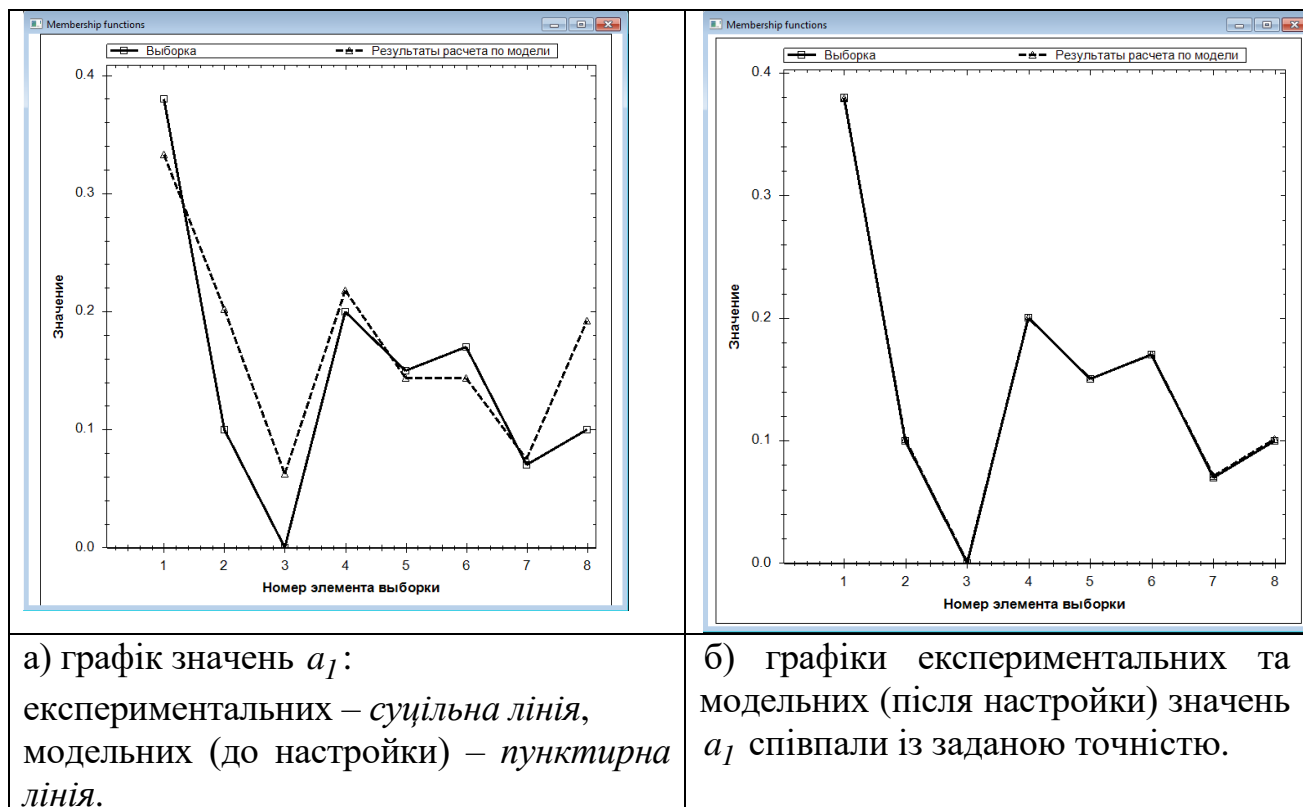


Рис. 2 – Графіки значень вихідної змінної  $a_1$

Перейдемо до розв'язання модельної тестової задачі location-allocation, використовуючи алгоритм, запропонований в роботі [4], зі значеннями параметрів  $a_1, \dots, a_5$ , отриманими (відновленими) за методом нейролінгвістичній ідентифікації після настройки.

Для розв'язання цієї модельної задачі з нечіткими параметрами  $a_1, \dots, a_5$  був застосований алгоритм з [4] з тими ж вихідними даними, що і для чітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$ .

В результаті роботи цього алгоритму, для відновлених до настройки параметрів  $a_1 = 0,07493$ ;  $a_2 = 0,19432$ ;  $a_3 = 0,33743$ ;  $a_4 = 0,21138$ ;  $a_5 = 0,04007$ , за 44 ітерації отримані:

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі 0,30075;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі 0,30299.

В результаті роботи цього алгоритму, для відновлених після настройки параметрів  $a_1 = 0,07000$ ;  $a_2 = 0,10000$ ;  $a_3 = 0,38000$ ;  $a_4 = 0,20000$ ;  $a_5 = 0,00000$ , за 46 ітерації отримані:

- максимальне значення функціонала двоїстої задачі 0,26722;
- мінімальне значення функціонала прямої задачі 0,26789.

Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування кожним підприємством представлено на рис. 3:

- до настройки – пунктирною лінією;
- після настройки – суцільною лінією;

*Оптимальні координати розташованих підприємств:*

*до настройки позначені на рисунку - «■»*

$$\tau_1 = (0,28883; 0,27976);$$

$$\tau_2 = (0,17024; 0,80697);$$

$$\tau_4 = (0,81631; 0,16100);$$

$$\tau_5 = (0,69535; 0,68627);$$

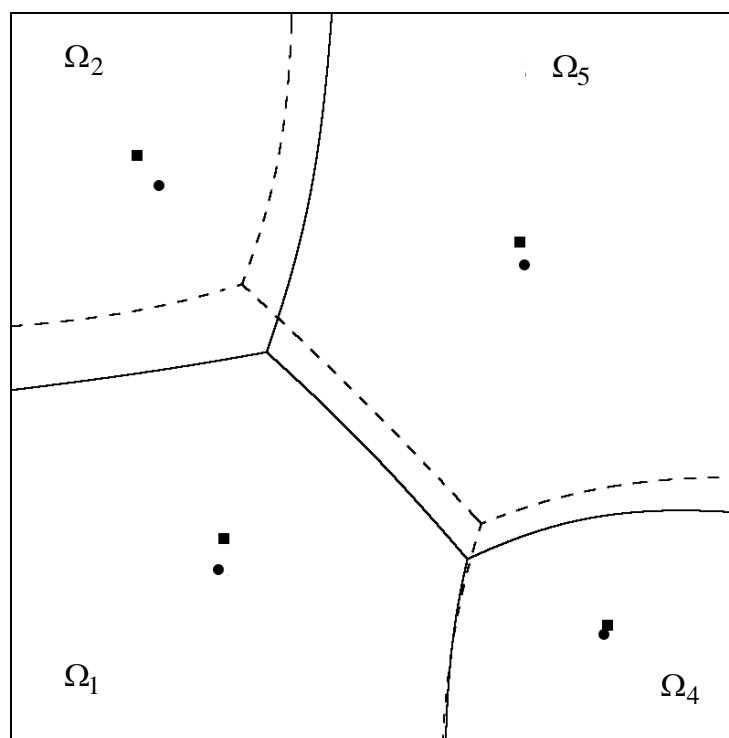
*після настройки позначені на рисунку - «●»*

$$\tau_1 = (0,28439; 0,23794);$$

$$\tau_2 = (0,19985; 0,76565);$$

$$\tau_4 = (0,81255; 0,14963);$$

$$\tau_5 = (0,70583; 0,65526).$$



**Рис.3**

Порівнюючи результати розв'язання задачі location-allocation, отримані для чітких параметр  $a_1, \dots, a_5$  у цільовому функціоналі (рис. 1) та для нечітких параметрів  $a_1, \dots, a_5$ , відновлених за допомогою методу нейролінгвістичній ідентифікації після настройки (рис. 3), бачимо, що оптимальні рішення цих задач збігаються з достатнім ступенем точності.

Таким чином, можна зробити висновок, що метод нейролінгвістичній ідентифікації з достатнім ступенем точності відновлює значення параметрів, які невідомі або неточні.

**Висновки.** У роботі розв'язано одну нескінченновимірну задачу location-allocation з нечіткими параметрами, яка у математичній постановці зводиться до неперервної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття множини з  $n$ -вимірному евклідового простору  $E_n$  на підмножини з

відшукуванням координат центрів цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, цільовий функціонал якої має нечіткі параметри.

Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує розв'язання розглянутої задачі у середовищі Microsoft Visual Studio з використанням об'єктно-орієнтованої мови програмування C#.

Наведено результати для модельної задачі location-allocation з нечіткими параметрами, які отримані за допомогою розробленого програмного забезпечення. Проведено порівняння результатів розв'язання нескінченновимірної задачі location-allocation з чіткими параметрами та результатів для випадку, коли деякі параметри розв'язуваної задачі неточні, нечіткі або їх математичний опис недостовірний.

### Бібліографічні посилання

1. **Киселева, Е.М.**, Шор, Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография. - К.: Наукова думка, 2005. - 564 с.
2. **Киселева, Е.М.** Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств n-мерного Евклидова пространства. Теоретические и практические приложения // Проблемы управления и информатики, 2018. - №5. – С. 114-135.
3. **Murat, A.**, Verter, V., Laporte, G. A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand // Les Cahiers du GERAD, G-2008-42. – P. 1-25.
4. **Кісельова, О.М.**, Притоманова, О.М., Журавель, С.В., Шаравара, В.В. Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Ліра, 2018. – С. 91-104.
5. **Elena M. Kiseleva**, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 50, 2018, Issue 3, pp. 1-20. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.
6. **Elena M. Kiseleva**, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel Valuation of Startups Investment Attractiveness Based on Neuro-Fuzzy Technologies // Journal of Automation and Information Sciences, Volume 48, 2016, Issue 9, pp. 1-22. - DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i9.10.
7. **Киселева, Е.М.**, Притоманова, О.М., Шаравара, В.В., Журавель, С.В. Объектно-ориентированный подход к программной реализации алгоритма решения нелинейных задач оптимального разбиения множеств // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Ліра, 2017. – С. 87 – 95.

Надійшла до редколегії 04.10.2018.

**О.М. Кісельова\*, В.О. Стрєва\*\***

*\*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*\*\*Дніпровський державний технічний університет*

## **ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕКРЕАЦІЙНИХ РЕСУРСІВ**

Проведено чисельне дослідження задач оптимального розподілу рекреаційних ресурсів, адаптованих до неперервної нелінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин, розв'язання яких може бути цікавим у сенсі розвитку рекреації та туризму.

**Ключові слова:** туристично-рекреаційний об'єкт, рекреаційний потенціал, метод експертних оцінок, оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача.

Проведено численную реализацию задач оптимального распределения рекреационных ресурсов, адаптированных к непрерывной нелинейной многопродуктовой задаче оптимального разбиения множеств, решение которых может быть интересным в смысле развития рекреации и туризма.

**Ключевые слова:** туристическо-рекреационный объект, рекреационный потенциал, метод экспертных оценок, оптимальное разбиение множеств, многопродуктовая задача.

**Numerical realization of the problems of optimal distribution of recreational resources adapted to the continuous non-linear multiproduct problem of optimal partitioning of sets, the solution of which can be interesting in the sense of the development of recreation and tourism, is carried out. The success of most management tasks depends on the best way to use resources. In general, this problem is reduced to the problems of optimal resource allocation. The tasks of this type include the tasks of optimal placement of tourist complexes on a given territory, which is attractive in the sense of the tourism industry. In this case, the models of functioning and development of tourist and recreational systems are considered that can be used for analysis and forecasting of the tourism industry, both at the regional and national and international levels. The problem of the optimal distribution of recreational resources in the conditions of the modern and perspective structure of recreational needs was investigated. A mathematical model of the problem is constructed, which is a nonlinear continuous multi-product problem of the optimal partition of a set  $\Omega \in E^n$  into its disjoint subsets (among which there may be empty ones) with fixed coordinates of the centers of these subsets under constraints in the form of equalities and inequalities. An analytical solution of the problem is obtained, which includes parameters that are sought as the optimal solution of the auxiliary dual finite-dimensional optimization problem with a nonsmooth target functional. On the basis of the analytical solution of the problem studied, a theoretically grounded solution algorithm was developed. A numerical investigation of the problem is carried out. The presented research results can serve as a useful tool in the sense of effective optimal partitioning of the functioning zones of existing tourist and recreational facilities that are able to produce service complexes to meet the necessary needs of recreants from the service area in**

conditions of the optimal cost of recreational needs.

**Keywords:** tourist and recreational facility, recreational potential, expert assessment method, optimal sets partitioning, multiproduct problem.

**Вступ.** Задачі оптимального розподілу ресурсів виникають у багатьох галузях виробництва та господарювання. Серед задач такого типу можуть бути задачі оптимального розміщення туристичних комплексів на заданій території, яка є привабливою в сенсі туристичної індустрії [1]. У цьому випадку розглядають моделі функціонування і розвитку туристично-рекреаційних систем, які можуть бути використані для аналізу та прогнозування індустрії туризму, як на регіональному так і на державному та міжнародному рівнях. Отже, у вирішенні сучасних проблем ефективності використання ресурсів їх алгоритмічна і програмна реалізація є досить актуальними та без сумніву мають суттєве прикладне значення.

Представлена робота присвячена чисельному дослідженню задач оптимального розподілу рекреаційних ресурсів в умовах сучасної та перспективної структури рекреаційних потреб. Метою роботи є чисельне розв'язання прикладних задач, які відповідають моделі, розробленої в [2].

**Постановка задачі.** Розглянемо деяку територію, яка є привабливою в плані туристичної індустрії, та модель функціонування і розвитку туристично-рекреаційної системи (ТРС). Рекреаційний процес в ТРС, як процес відновлення фізичних, інтелектуальних та емоційних сил людини, забезпечується множиною деяких рекреаційних ресурсів. Будемо вважати, що на деякій території розміщені  $N$  ТРО, кожний з яких характеризується певним набором рекреаційних характеристик. Для простоти будемо характеризувати  $i$ -тий ТРО по  $j$ -ому виду рекреаційних ресурсів коефіцієнтом рекреаційної привабливості або рекреаційним потенціалом –  $\eta_i^j \in [1; k]$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Ці величини визначаються, наприклад, за допомогою методу експертних оцінок, значення параметру. Параметр  $k$  – довільне натуральне число.

**Задача А.** Розбити множину рекреантів  $\Omega$  на їх зони туристично-рекреаційного обслуговування  $\Omega_i^j$   $N$  туристично-рекреаційними об'єктами, які входять в задану ТРС окремо по кожному з  $j$ -го виду рекреаційних ресурсів (далі - послуг), що продукуються в ТРО так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$\text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Припустимо, що рекреанту потрібен набір послуг, які є в даній ТРС, але повного набору послуг немає в жодному  $i$ -тому ТРО  $i = 1, \dots, N$ . Тобто рекреант вимушений користуватися деякою підмножиною пунктів рекреації, які є в даній ТРС. Необхідно мінімізувати сумарну вартість рекреаційного процесу:

$$F\left(\left\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M\right\}\right) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ (k+1 - \eta_i^j) \phi_i^j(Y_i^j) + \iint_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x, y) dx dy \right],$$

де  $\rho^j(x, y)$  – щільність, з якою розподілений попит на  $j$ -ий вид послуг в області  $\Omega$ ,

$(x, y)$  – координати знаходження рекреанта,

$\tau_1, \dots, \tau_N$  – пункти можливого розміщення ТРО,

$c^j((x, y), \tau_i)$  – транспортні витрати рекреанта для  $i$ -го ТРО по  $j$ -ому виду послуг;

$\eta_i^j$  – рекреаційний потенціал  $i$ -го ТРО по  $j$ -ому виду послуг;

$\phi_i^j(Y_i^j)$  – залежність рекреаційної вартості  $i$ -го ТРО від клієнтопотоків по  $j$ -ому виду послуг,

де  $Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy$  – потужність  $i$ -того ТРО по  $j$ -тому виду послуг.

Потужність  $i$ -го ТРО по всім видам послуг визначається сумарним попитом рекреантів, які належать  $\Omega_i^j$  та не повинна перевищувати існуючі об'єми рекреаційних ресурсів, визначені відповідними обмеженнями:

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, i = 1, \dots, p, \quad \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, i = p + 1, \dots, N.$$

При цьому виконуються умови розв'язності задачі:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Представлена задача є нелінійною неперервною багатопродуктовою задачею оптимального розбиття множини  $\Omega \in E^n$  на її неперетинні підмножини  $\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_N^2; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M$  (серед яких можуть бути і порожні) з фіксованими координатами центрів цих підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей. Згідно дослідженням, приведеним в [2], здійснено перехід від нескінченновимірної до пошуку сідлової точки визначеного функціонала у вигляді теореми 1, на основі якої розроблено алгоритм розв'язання задачі  $A$ , який застосовано до розв'язання наступних модельних задач.

*Модельна задача 1.*

Нехай задано множину  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10\}$  рекреантів, споживачів трьох видів рекреаційних послуг, які можуть надаватися дев'ятьма туристично-рекреаційними об'єктами. Транспортні витрати рекреанта  $(x, y)$  для  $i$ -го ТРО по  $j$ -ому виду послуг задано відповідно до виду послуг:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & j = 1; \\ |x - \tau_i^{(1)}| + |y - \tau_i^{(2)}|, & j = 2; \\ \max\{|x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|\}, & j = 3. \end{cases}$$

Попит  $\rho^j(x, y)$  на рекреаційні послуги виду розподілений в області  $\Omega$  з відповідними щільностями, заданими у наступному аналітичному вигляді:

$$\rho^j(x, y) = \frac{1}{\ln|(x - y)^j - 110.003|}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Функції  $\phi_i^j(Y_i^j)$ , які описують залежність рекреаційної вартості  $i$ -го ТРО від клієнтопотоків по  $j$ -ому виду послуг, мають вигляд

$$\phi_i^j(Y_i^j) = (Y_i^j)^2, \quad i = \overline{1, 9}, \quad j = 1, 2, 3,$$

де потужність  $Y_i^j$   $i$ -го ТРО по наданню  $j$ -го виду послуг визначається за формулою:  $Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy$ .

Потужність  $i$ -го ТРО по всім видам рекреаційних послуг визначається сумарним попитом рекреантів, які належать  $\Omega_i^j$ ,  $i = \overline{1, 9}$ , та для пунктів ТРО  $i = 1, 2, 4, 5, 7, 9$  не повинна перевищувати задані об'єми, тобто на потужності ТРО накладені наступні обмеження :

$$0 \leq \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 7, 9$$

$$b_1 = 100, \quad b_2 = 86, \quad b_4 = 10, \quad b_5 = 17, \quad b_7 = 100, \quad b_9 = 25,$$

а для пунктів ТРО з номерами  $i = 3, 6, 8$  повинна дорівнювати заданим

об'ємам:

$$\sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 3, 6, 8$$

$$b_3 = 36, \quad b_6 = 5, \quad b_8 = 15.$$

Необхідно розбити множину рекреантів  $\Omega$  на їх зони обслуговування дев'ятьма ТРО по кожному виду рекреаційних послуг, тобто на підмножини  $\Omega_i^j$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , так, щоб мінімізувати функціонал сумарної вартості рекреаційного процесу:

$$F\left(\left\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_9^1; \Omega_1^2, \dots, \Omega_9^2; \Omega_1^3, \dots, \Omega_9^3\right\}\right) = \\ = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^9 \left[ (k+1 - \eta_i^j) \phi_i^j(Y_i^j) + \iint_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i) \rho^j(x, y) dx dy \right],$$

Не є виключенням той випадок, коли деякі з підмножин  $\Omega_i^j$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , опиняться порожніми.

Множина  $\Omega$  покривалася сіткою з вузлами  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, 21$ ,  $j = 1, \dots, 21$ .

В якості початкових значень двоїстих змінних задано  $\psi_i^{(0)} = 0$ ,  $i = \overline{1, 9}$ ; початкові значення потужностей:  $Y_1^{j(0)} = 50$ ,  $Y_2^{j(0)} = 10$ ,  $Y_3^{j(0)} = 10$ ,  $Y_4^{j(0)} = 60$ ,  $Y_5^{j(0)} = 500$ ,  $Y_6^{j(0)} = 10$ ,  $Y_7^{j(0)} = 10$ ,  $Y_8^{j(0)} = 80$ ,  $Y_9^{j(0)} = 50$ ,  $j = \overline{1, 3}$ ; а також задані координати розміщення ТРО:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 9.0; 6.3; 5.1; 2.6; 7.9; 5.5; 7.0; 9.5; 1.8 \\ 8.5; 7.0; 8.9; 2.5; 2.1; 4.5; 6.4; 5.1; 7.7 \end{pmatrix}$$

Умовою завершення обчислень є виконання нерівності:

$$\left\| \left( Y^{(k)}, \psi^{(k)} \right) - \left( Y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)} \right) \right\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

За 146 ітерацій отримано:

- оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на дев'ять зон обслуговування кожним з дев'яти ТРО по трьом видам послуг представлено на рис. 1;
- максимальне значення функціоналу двоїстої задачі  $G^* \approx 733.51$ ;
- мінімальне значення функціоналу прямої задачі  $F_* \approx 745.64$ ;
- оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств:

$$Y_1^{1*} = 0.21; Y_2^{1*} = 0.35; Y_3^{1*} = 12.13; Y_4^{1*} = 1.66; Y_5^{1*} = 1.01; Y_6^{1*} = 1.46;$$

$$Y_7^{1*} = 8.8; Y_8^{1*} = 5.23; Y_9^{1*} = 0.17;$$

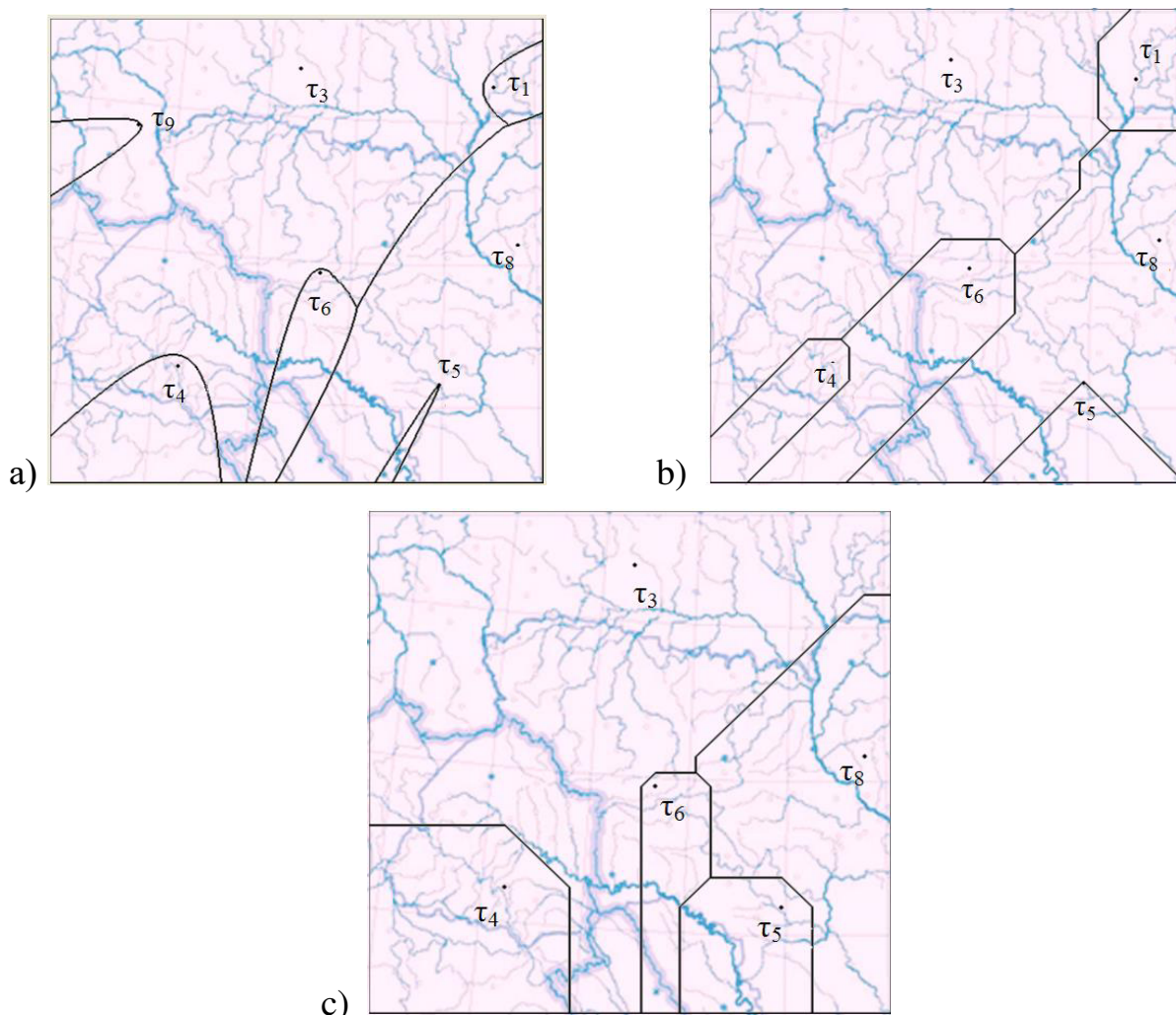
$$Y_1^{2*} = 0.31; Y_2^{2*} = 0.92; Y_3^{2*} = 12.33; Y_4^{2*} = 1.55; Y_5^{2*} = 1.01; Y_6^{2*} = 1.56;$$

$$Y_7^{2*} = 0.25; Y_8^{2*} = 5.49; Y_9^{2*} = 0.36;$$



$$Y_1^{3*} = 0.42; Y_2^{3*} = 9.91; Y_3^{3*} = 11.47; Y_4^{3*} = 1.83; Y_5^{3*} = 0.88; Y_6^{3*} = 0.74;$$

$$Y_7^{3*} = 0.17; Y_8^{3*} = 4.7; Y_9^{3*} = 0.26.$$



**Рис. 1 – Оптимальне розбиття множини  $\Omega$  на зони обслуговування кожним з дев'яти ТРО з фіксованими центрами по трьом видам рекреаційних послуг для модельної задачі 1**

*Модельна задача 2.* У постановці першої модельної задачі задамо функцію попиту  $\rho^j(x, y) = 1, j = 1, 2, 3$ . За таких умов, після 215 ітерацій, отримано наступні результати:

- оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$  на дев'ять зон обслуговування кожним з дев'яти ТРО по трьом видам послуг представлено на рисунку 2;
- максимальне значення функціоналу двоїстої задачі  $G^* \approx 5888.87$ ;
- мінімальне значення функціоналу прямої задачі  $F_* \approx 5876.46$ ;
- оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств:

$$Y_1^{1*} = 20.62; Y_2^{1*} = 21.74; Y_3^{1*} = 11.95; Y_4^{1*} = 3.28; Y_5^{1*} = 5.68; Y_6^{1*} = 1.64;$$

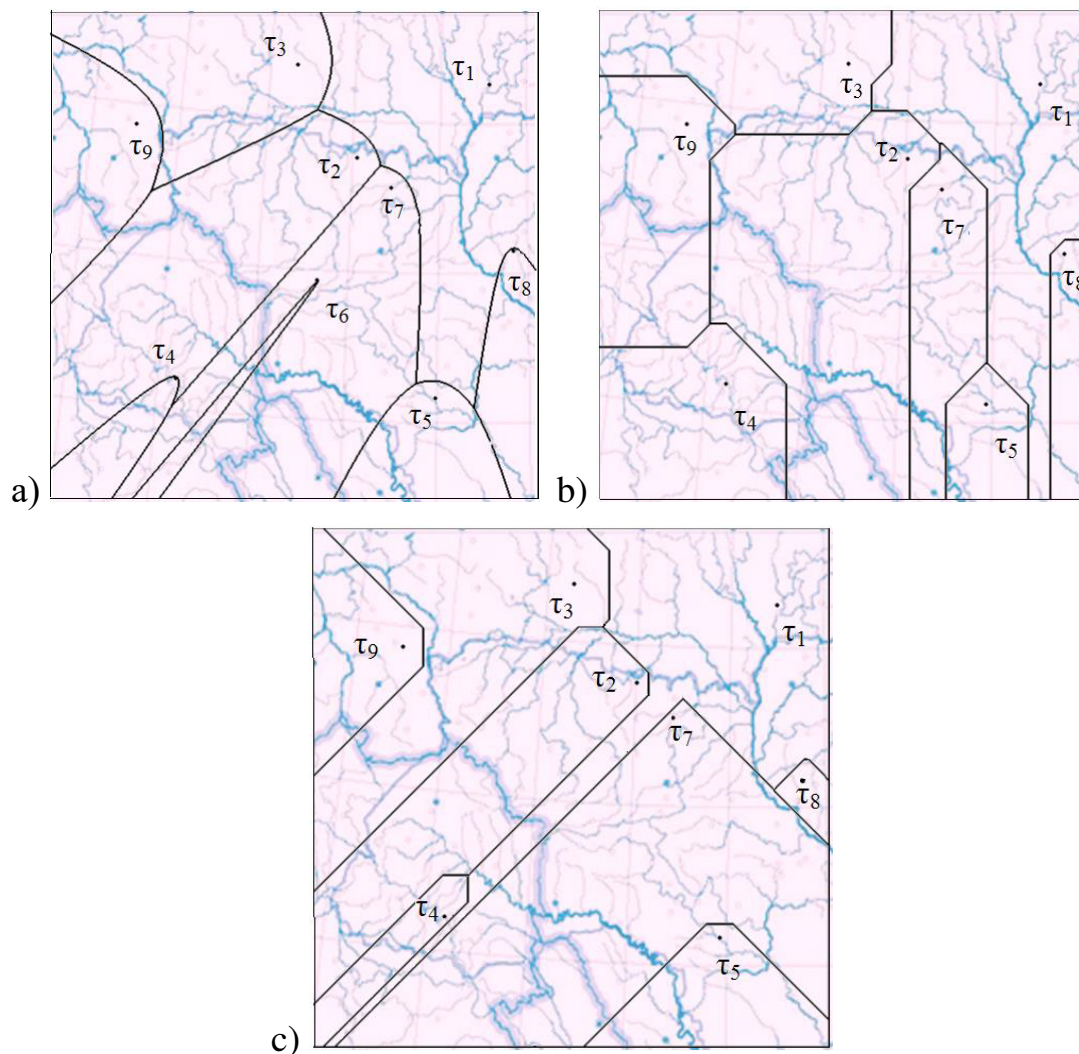
$$Y_7^{1*} = 21.75; Y_8^{1*} = 5.06; Y_9^{1*} = 8.24;$$

$$Y_1^{2*} = 20.77; Y_2^{2*} = 21.77; Y_3^{2*} = 12.28; Y_4^{2*} = 2.43; Y_5^{2*} = 5.98; Y_6^{2*} = 1.46;$$

$$Y_7^{2*} = 21.82; Y_8^{2*} = 5.25; Y_9^{2*} = 8.24;$$

$$Y_1^{3*} = 20.42; Y_2^{3*} = 21.54; Y_3^{3*} = 11.79; Y_4^{3*} = 4.3; Y_5^{3*} = 5.36; Y_6^{3*} = 1.9;$$

$$Y_7^{3*} = 2.15; Y_8^{3*} = 4.66; Y_9^{3*} = 8.51.$$



**Рис. 2 – Оптимальне розбиття множини  $\Omega$  на зони обслуговування кожним з дев'яти ТРО з фіксованими центрами по трьом видам рекреаційних послуг для модельної задачі 2**

Для кожної із задач виконуються умови розв'язності (1). Тобто загальна оптимальна потужність дев'яти ТРО, яка отримана за алгоритмом розв'язку (для модельної задачі 1 це 85.18, а для модельної задачі 2 це 280.59) не перевищує  $S = 394$  – суми заданих об'ємів потужностей ТРО. Отримані оптимальні потужності 3-го, 6-го ТРО та 8-го ТРО у кожній із задач

відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорівнюють заданим значенням, а саме  $\sum_{j=1}^3 Y_3^{j*} \approx 36$ ;  $\sum_{j=1}^3 Y_6^{j*} \approx 5$ ;  $\sum_{j=1}^3 Y_8^{j*} \approx 15$ .

**Висновки.** Для розробленої в [2] математичної моделі задачі оптимального розподілу рекреаційних ресурсів розроблено теоретично обґрунтовані алгоритми розв'язання. На основі побудованих алгоритмів проведено чисельне дослідження поставленої задачі на ряді модельних задач. Представлені результати досліджень можуть слугувати корисним інструментом у сенсі ефективного оптимального розбиття зон функціонування існуючих туристично-рекреаційних об'єктів, які здатні продукувати комплекси послуг та задовольняти необхідні потреби рекреантів з області обслуговування за умов оптимальної вартості рекреаційних потреб.

#### Бібліографічні посилання

1. **Школа І. М.** Розвиток міжнародного туризму в Україні / І. М. Школа, В.С. Григорків, В.Ф. Кифяк // Видавництво "Рута" – Чернівці – 1997.
2. **Кісельова О.М.** Дослідження моделі оптимального розподілу рекреаційних ресурсів в умовах сучасної та перспективної структури рекреаційних потреб / О.М. Кісельова, В.О. Строева // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць. – Д.: ДНУ, 2017. – С. 96-102.

*Надійшла до редколегії 03.10.2018.*

**И.В. Козин, С.Е. Батовский**  
*Запорожский национальный университет*

## **ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ КАРТ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАСКРОЯ**

Исследуется проблема генерации безотходных карт прямоугольного раскроя. Для различных видов карт исследуются соответствующие модели и алгоритмы генерации. Предложены генераторы для безотходных карт раскроя на прямоугольники ограниченных размеров, генераторы карт гильотинного раскроя.

**Ключевые слова:** карта раскроя, безотходный прямоугольный раскрой, алгоритмы генерации прямоугольного раскроя, гильотинный раскрой.

Досліджується проблема генерації безвідходних карт прямокутного розкрою. Для різних видів карт досліджуються відповідні моделі і алгоритми генерації. Запропоновано генератори для безвідходних карт розкрою на прямокутники обмежених розмірів, генератори карт гільотинного розкрою. Відомо, що велика кількість прикладних оптимізаційних задач на сьогоднішній день не можуть бути точно розв'язані, оскільки їх обчислювальна складність відноситься до класу NP-важких. У багатьох випадках для пошуку наближених рішень використовуються метаевристики різних типів, але при виборі тієї чи іншої метаевристики залишається відкритим питання про якість обраного методу. Пропонується кілька можливих варіантів розв'язання проблеми, одним з яких є перевірка метаевристичних алгоритмів на прикладах з відомих тестових бібліотек з відомими рекордами. Іншим підходом до вирішення проблеми оцінки якості алгоритмів, що розглядається, є порівняння «нового» алгоритму з іншими алгоритмами, робота яких вже детально вивчена. Побудова генератора випадкових завдань з відомим оптимальним рішенням, може вирішити проблему отримання «середніх» оцінок точності використовуваного алгоритму в порівнянні з іншими методами. У роботі розглядається побудова генераторів випадкових повних карт прямокутного розкрою з урахуванням певних обмежень на розміри складових їх елементарних прямокутників. Існування наборів таких карт формує базу тестових завдань для перевірки якості наближених алгоритмів пошуку оптимального розкрою. Прямокутний розкрій, який розглядається в роботі, також є основою для побудови розкроїв з використанням більш складних фігур. В якості найпростішого методу генерації випадкових прямокутних карт розкрою наводиться метод, який використовує гільотинний розкрій. Також, наводиться більш складний алгоритм генерації випадкового прямокутного розкрою, робота якого полягає в генерації випадкової точкової сітки і видалення деяких випадкових точок з цієї сітки. Велика увага приділяється саме реалізаціям наведених методів, оскільки основною метою статті є застосування генераторів на практиці. Всі наведені алгоритми вже використовуються в програмній системі тестування еволюційно-фрагментарних алгоритмів для різних класів оптимізаційних задач на графах.

**Ключові слова:** карта розкрою, безвідходний прямокутний розкрій, алгоритми генерації прямокутного розкрою, гільотинний розкрій.

It is known that a large number of applied optimization problems can't be exactly solved nowadays, because their computational complexity is related to the NP-hard class. In many cases metaheuristics of various types are used to search for approximate solutions, but the choice of the concrete metaheuristic has open question of the quality of the chosen method.

There are several possible solutions to this problem, one of which is the verification of metaheuristic algorithms using examples from known test libraries with known records. Another approach to solving the problem of evaluating the quality of algorithms is to compare the "new" algorithm with other algorithms, the work of which has already been investigated. The construction a generator of random problems with a known optimal solution can solve the problem of obtaining "average" estimates of the accuracy for used algorithm in comparison with other methods.

The article considers the construction of generators of random non-waste maps of rectangular cutting with restrictions on the rectangles of limited sizes. The existence of sets of such cards forms the basis of test problems for checking the quality of approximate algorithms for searching for optimal solution. Rectangular cutting, which is considered in the article, is also the basis for building cuts using more complex shapes. As the simplest method of generating random rectangular non-waste maps, considered a method that uses guillotine cutting. Also, a more complex algorithm for generating a random rectangular cut is given, whose job is to generate a random dot grid and remove some random points from this grid. Much attention is paid to the implementation of the above methods, since the main purpose of the article is to simplify using of generators in practice.

All the above algorithms are already used in the software system for testing evolutionary-fragmentary algorithms for various classes of optimization problems on the graphs.

**Keywords:** cutting map, wasteless rectangular cutting, rectangular cutting generation algorithms, guillotine cutting.

**Введение.** Большое количество прикладных оптимизационных задач на сегодняшний день не могут быть точно решены, поскольку их вычислительная сложность относится к классу NP-трудных [1].

Однако потребность в решении таких задач возрастает и, соответственно, увеличивается поток работ, посвященных поискам приближенных решений трудных задач. Во многих случаях для поиска приближенных решений используются метаэвристики различных типов. При использовании метаэвристик открытым остается вопрос о качестве предлагаемого метода. Поскольку эвристические алгоритмы не имеют априорных оценок сходимости, то неизвестно насколько полученное приближенное решение близко к оптимальному. Как следствие, очень трудно оценить целесообразность применения алгоритма в различных оптимизационных задачах.

Одним из возможных решений данной проблемы может служить проверка метаэвристических алгоритмов на примерах из известных тестовых библиотек с известными рекордами, и попытка улучшить эти рекорды (ORLIB [2]).

Другим подходом к решению проблемы оценки качества алгоритмов является сравнение «нового» алгоритма с другими алгоритмами, работа которых уже детально изучена. Такое сравнение должно проходить на большой базе тестовых задач со случайным набором начальных данных. Это

позволит вычислить «средние» сравнительные характеристики эффективности тестируемого алгоритма. Если удастся построить генератор случайных задач с известным оптимальным решением, то можно получить «средние» оценки точности используемого алгоритма в сравнении с другими методами. Таким образом, задача генерации тестовых индивидуальных задач для массовых NP-трудных задач безусловно является актуальной.

**Обзор имеющихся результатов.** Задача раскроя впервые сформулирована Канторовичем в 1939 году [3]. В 1951 году, ещё до того, как компьютеры стали широко доступны, Л.В. Канторович и В.А. Залгаллер предложили [4] способ решения задачи экономного использования материала при раскрое с помощью линейного программирования.

Большинство существующих точных методов решения задачи прямоугольного негильотинного раскроя сводятся к перебору всего множества допустимых решений. Методы улучшенного перебора объединены для этих задач под названием «метода ветвей и границ». В 1977 г. И.В. Романовским представлена общая идея переборного метода для решения общей экспоненциальной задачи, и предложена его конкретизация в виде метода «ветвей и границ» для решения задач упаковки [5]. В дальнейшем метод получает развитие за счет введения процедур сокращения перебора в работах В.М. Картака и Э.А. Мухачевой [6, 7]. Независимо за рубежом выходит серия статей S. Martello и P. Toth, посвященная разработке улучшенных версий метода ветвей и границ [8].

Большинство существующих комбинаторных методов решения задач прямоугольного негильотинного раскроя и размещения объектов сложных форм сводятся к перебору всего множества допустимых решений. Методы улучшенного перебора объединены и для этих задач под названием «метода ветвей и границ». В 1986 г. Ю.Г. Стоян и С.В. Яковлев описали общую схему метода и привели основные алгоритмы [9]. Другой подход к переборным методам решения разработан в середине 80-х г. А.И. Липовецким [10]. На основе понятия «зоны» доказывается, что для любой упаковки прямоугольников можно указать такой их порядок, при котором каждый следующий прямоугольник не пересекается ни с одной из зон предыдущих (топологическая сортировка). Метод зон реализован в 1988 г., усовершенствован и исследован в 2001 г. В.В. Бухваловой [11].

Тестовые примеры для задачи прямоугольного раскроя можно найти в [12]. Ряд генераторов тестовых примеров приведены в [13].

**Формулировка целей.** Целью настоящей работы является построение генераторов случайных полных карт прямоугольного раскроя с учетом определенных ограничений на размеры составляющих их элементарных прямоугольников. Наборы таких карт могут в последствии выступать в качестве базы тестовых задач для проверки качества приближенных алгоритмов поиска оптимального раскроя. Прямоугольный раскрой также является основой для построения раскроев с использованием более сложных фигур. В этом случае «сложные» фигуры вписываются в некоторые

прямоугольники, из которых генерируется начальный прямоугольный раскрой.

**Постановка задачи прямоугольного раскроя.** Рассмотрим набор прямоугольников, заданных своими размерами  $(h_i, w_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Допустимым решением считается такое размещение всех этих прямоугольников (или некоторых из них) на прямоугольном листе размером  $H \times W$  при котором внутренности прямоугольников попарно не пересекаются. Каждое допустимое решение задается набором индексов  $I \in \{1, 2, \dots, n\}$  и набором пар координат  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$ . Каждая пара определяет положение левого верхнего угла размещаемого прямоугольника. Допустимое решение задачи будем называть картой раскроя.

Пусть  $I$  – множество индексов, соответствующих допустимому решению задачи. Тогда задача поиска оптимального решения состоит в поиске такого подмножества индексов  $I$ , для которого будет минимальной разность  $NW - \sum_{i \in I} h_i w_i \rightarrow \min$ . Установить оптимальность той или иной карты раскроя

достаточно сложно. Однако существует случай, когда проблема оптимальности карты имеет очевидное решение. Если в карте раскроя множество индексов задает все прямоугольники  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  и при этом выполняется условие  $NW - \sum_{i \in I} h_i w_i = 0$ , то карту раскроя будем называть

полной картой. Очевидно, что полная карта раскроя соответствует оптимальному решению задачи.

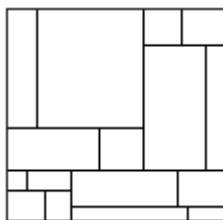
**Генерация случайных полных карт прямоугольного раскроя.** Рассмотрим некоторые из методов генерации случайных прямоугольных раскроев, которые могут быть взяты в основу генератора.

Наиболее простой случайный раскрой может быть получен с помощью алгоритма генерации гильотинного раскроя [11,14]. Суть такого раскроя заключается в том, что каждый разрез выполняется строго от одного края листа до другого, параллельно одной из его сторон.

Алгоритм работает рекурсивно. Глубина рекурсии  $n$ , а также размеры  $W \times H$  исходного листа  $f_0$  определяются заранее. На очередном шаге для фрагмента  $f_i^k$  случайным образом выбирается одно из направлений разреза: вертикальное или горизонтальное. Затем генерируется случайное число  $\alpha$  из интервала  $(0, 1)$ . При этом, вертикальный разрез выполняется на расстоянии  $\alpha \times W$  от левого края листа, а горизонтальный – на расстоянии  $\alpha \times H$  от верхнего. Каждый из полученных фрагментов  $f_{i+1}^1$  и  $f_{i+1}^2$ , так же рекурсивно разрезается, если для него выполняется условие:  $i + 1 < n$ .

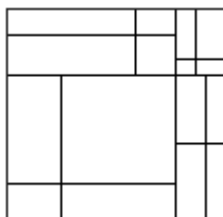
Пример работы данного алгоритма для  $n = 4$  представлен ниже (рис. 1).





**Рис. 1. Пример гильотинного раскроя.**

Одна из вариаций данного алгоритма упраздняет выбор направления разреза, генерируя сразу два числа  $\alpha$  и  $\beta$ , и рассекая очередной фрагмент сразу на четыре части. Структура раскроя при этом становится более однообразной (рис. 2).

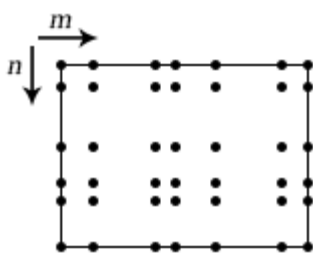


**Рис. 2. Шестнадцать фрагментов, полученные другой вариацией гильотинного раскроя.**

Существует более сложный алгоритм генерации случайного прямоугольного раскроя, работа которого состоит из нескольких этапов:

1. генерации случайной сетки из точек, которая будет покрывать исходный лист;
2. удаления некоторых точек сетки случайным образом;
3. преобразования полученной сетки в соответствующий прямоугольный раскрой.

Перед началом работы алгоритма определяются размеры  $W \times H$  исходного листа, а также, генерируются параметры  $m$  и  $n$  случайной точечной сетки, на которую условно разбивается исходный лист (рис. 3).



**Рис. 3. Пример случайной сетки из точек, которой покрывается исходный лист.**

Параметр  $m$  ( $m \geq 4$ ), при этом, задаёт количество точек сетки вдоль одной стороны листа, а параметр  $n$  ( $n \geq 4$ ) – вдоль другой. Крайние точки сетки всегда располагаются по краю листа.

В процессе генерации случайной точечной сетки заполняются два массива  $a[i]$ ,  $i = \overline{1, m}$  и  $b[j]$ ,  $j = \overline{1, n}$  случайными числами в возрастающем порядке. При этом, произвольная точка сетки будет задана парой чисел  $(x, y)$ , где



$x \in a[i]$ ,  $y \in b[j]$ . Нижче приведена реалізація даного процесу для масива  $a[i]$  (лист. 1).

```

var a[m];

a[0] = 0;
for (int i = 1; i < m; i++)
{
    a[i] = a[i - 1] + random(0, 1);
}

for (int i = 1; i < m; i++)
{
    // Примечание. Для массива b используется listHeight.
    a[i] = listWidth * (a[i] / a[m - 1]);
}

```

### Лист. 1. Процес генерації масиву інтервалів сетки.

Применяя даний підхід, ймовірність отримати ту або іншу точкову сетку однакова середі всіх можливих точкових сеток з такими ж значеннями параметрів  $m$  і  $n$ .

Яким би дивним це не показалося, видалення випадкових точок з отриманої сетки можна виконувати ще до її генерації, оскільки процес залежить тільки від вхідних параметрів  $m$  і  $n$ .

В наступному процесі використовується матриця  $s[i, j]$  спеціального виду розміром  $m \times n$ , елементи якої можуть приймати тільки три значення: 0, 1 і 2. Кожен елемент матриці відповідає єдиній точці на отриманої сетці. Якщо елемент матриці приймає значення 0, то відповідуюча йому точка повинна бути видалена з сетки. Значення елемента рівне 2 забороняє видалення відповідуючої точки, а значення рівне 1 являється значенням за замовчуванням, і означає, що маніпуляції з точкою ще не були проведені. Крайні точки сетки завжди початково зафіксовані і не можуть бути видалені. Нижче представлена реалізація процесу ініціалізації даної матриці (лист 2).

Після ініціалізації алгоритм випадковим чином перебирає всі елементи матриці. Якщо наступний елемент матриці приймає значення 1, то відповідуюча йому точка позначається як видалена і значення елемента скидається в 0, при цьому сусідні по діагоналі елементи матриці отримують значення 2, а відповідуючі їм точки захищаються від видалення (лист. 3).

Послідовність перебору елементів матриці  $s[i, j]$  найбільш ефективно може бути представлена випадковою комбінаторною перестановкою з  $m \times n$  елементів, яка генерується уже відомим тасуванням Фішера-Йетса [15]. Рівновероятна випадкова перестановка забезпечує рівну ймовірність отримання випадкової матриці після виконання процесу.

Каждый элемент перестановки однозначно раскладывается на два индекса соответствующего элемента матрицы с помощью операций целочисленного деления и получения остатка от деления.

```
var s[m, n];  
for (int i = 0; i < m; i++)  
{  
    for (int j = 0; j < n; j++)  
    {  
        if ((i == 0) or (i == m - 1) or (j == 0) or (j == n - 1))  
        {  
            s[i, j] = 2;  
        }  
        else  
        {  
            s[i, j] = 1;  
        }  
    }  
}
```

**Лист. 2. Процесс инициализации матрицы.**

```
for (int i = 0; i < (m * n); i++)  
{  
    int x = permutation[i] % m; // a % b - остаток от деления a на b  
    int y = permutation[i] / n; // a / b - целочисленное деление a на b  
  
    if (s[x, y] == 1)  
    {  
        s[x, y] = 0;  
        s[x - 1, y - 1] = 2;  
        s[x - 1, y + 1] = 2;  
        s[x + 1, y - 1] = 2;  
        s[x + 1, y + 1] = 2;  
    }  
}
```

**Лист. 3. Процесс удаления точек сетки.**

На последнем этапе алгоритма сведения, которые были получены на первых двух этапах, объединяются и преобразовываются в удобный формат. Они могут быть использованы для быстрого визуального отображения раскроя, преобразованы в множество узловых точек, преобразованы в множество прямоугольных фрагментов и т.д., например, визуальный раскрой может быть построен, если каждую пару соседних зафиксированных точек сетки соединить прямой линией.

Несколько примеров работы алгоритма представлены ниже. Слева изображён результат, полученный для малых значений  $m$  и  $n$  (рис. 3а), а справа – наоборот, для больших (рис. 3б).

Для некоторых практических задач недостатком алгоритма может считаться наличие вытянутых прямоугольников в большинстве раскроев. Для сглаживания таких результатов существует небольшая модификация

алгоритма, суть которой состоит в том, чтобы не выполнять процесс удаления случайных точек сетки до конца. В этом случае доля перебираемых элементов матрицы  $s[i, j]$  задаётся некоторым параметром  $\alpha \in [0, 1]$ , тем самым используя только первые  $\alpha(m \times n)$  элементов перестановки, задающей порядок перебора элементов.

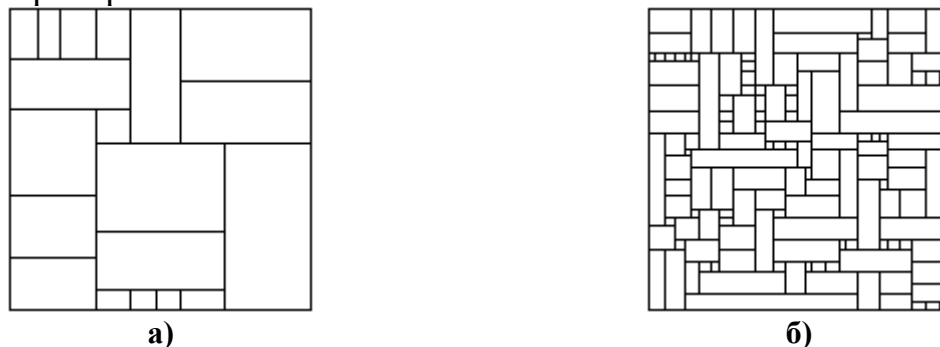


Рис. 3. Примеры работы алгоритма.

Сравнить результат работы модифицированного алгоритма (рис. 4б) с работой исходного алгоритма (рис. 4а), можно задав одинаковый порядок перебора элементов матрицы.

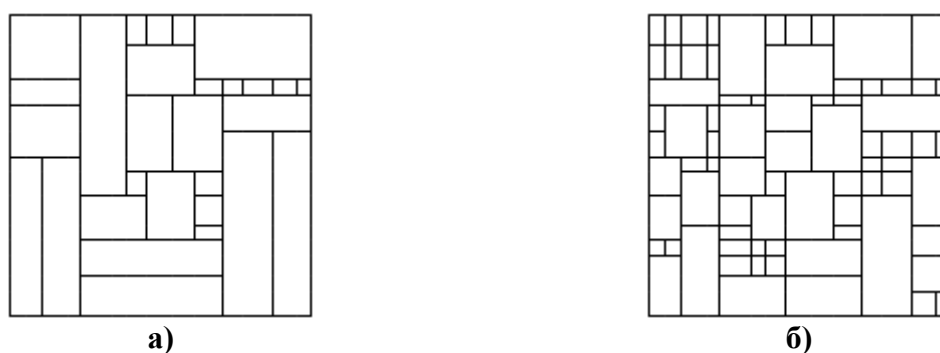


Рис. 4. Сравнение результатов исходного и модифицированного алгоритмов.

На рисунке (рис. 4) можно видеть, что многие большие вытянутые фрагменты ещё не успели образоваться в силу неполного перебора элементов. Однако, значение параметра  $\alpha$  близкое к нулю даёт случайный раскрой очень близкий к начальной сетке. В связи с этим, на практике более оправдано использование значения  $\alpha \in [0.5, 1]$ .

**Выводы.** В данной статье были рассмотрены некоторые алгоритмы генерации случайных графов, а также, наиболее простые методы генерации случайных прямоугольных раскроев. Большое внимание было уделено именно реализациям данных методов, поскольку идея статьи основана на практическом применении алгоритмов. Большинство из них уже используются в программной системе тестирования эволюционно-фрагментарных алгоритмов для различных классов оптимизационных задач на графах.

### Библиографические ссылки

1. **Гэри М.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / М. Гэри, Д. Джонсон; пер. А. Фридман. – М.: Мир. – 1982. – 416 с.
2. Библиотека тестовых задач OR-Library [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>. Заголовок с экрана.
3. **Канторович Л.В.** Mathematical methods of organizing and planning production [Текст] / Л.В. Канторович // Management Science. – issue 6 (4). – 1960. – P. 366-422.
4. **Канторович Л.В.** Рациональный раскрой промышленных материалов [Текст] / Л.В. Канторович, В.А. Залгаллер. – Новосибирск: Наука. – 1971.
5. **Романовский И.В.** Алгоритмы решения экстремальных задач [Текст] / И.В. Романовский. – М.: Наука. – 1977.
6. **Мухачева Э.А.** Рациональный раскрой прямоугольных листов на прямоугольные заготовки [Текст]: сб. науч. тр. / Э.А. Мухачева // Оптимальное планирование. – вып. 6. – 1966. – С. 43-115.
7. **Мухачева Э.А.** Задача прямоугольной упаковки: методы локального поиска оптимума на базе блочных структур [Текст] / Э.А. Мухачева, А.С. Мухачева // Автомат. и телемех. – 2004. – № 2. – С. 101-112.
8. **Martello S.** Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations [Текст] / S. Martello, P. Toth. – Wiley: Chichester. – 1990.
9. **Стоян Ю.Г.** Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 268 с.
10. **Липовецкий А.И.** К оптимизации свободного размещения прямоугольников [Текст] / А.И. Липовецкий // Автоматизация проектирования в машиностроении. – Минск: ИТК АН БССР. – 1985. – С. 80-87.
11. **Бухвалова В.В.** Задача прямоугольного раскроя: метод зон и другие алгоритмы [Текст] / В.В. Бухвалова. – СПб: СПбГУ. – 2001. – 96 с.
12. Тестовые примеры. Упаковка кругов и прямоугольников [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/Packing/pack\\_test1.html](http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/Packing/pack_test1.html). Заголовок с экрана.
13. ESICUP [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.fe.up.pt/esicup>. Заголовок с экрана.
14. **Morabito M.** Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: an and/or-graph approach [Текст] / М. Morabito, М. Arenales // European Journal of Operational Research. – 1996. – P. 548-560.
15. **Кнут Д.** Искусство программирования, том 2. Получисленные методы / Д. Кнут. – М.: «Вильямс». – 3-е изд. – 2007. – 832 с.

*Надійшла до редколегії 31.05.2018.*

**О.С. Магас, О.С. Сергеев**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ РОБАСТНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТУ**

Запропоновано алгоритм розв'язання задачі маршрутизації транспорту та отримано квазіоптимальний розв'язок задачі. Перевірена робастність розв'язків задачі на реальному прикладі.

**Ключові слова:** маршрутизація транспорту, евристичні алгоритми, робастність розв'язків, табу-пошук, агломеративна кластеризація.

Предложен алгоритм решения задачи маршрутизации транспорта и получено квазиоптимальное решение задачи. Проверена робастность решений задачи на реальном примере.

**Ключевые слова:** маршрутизация транспорта, эвристические алгоритмы, робастность решений, табу-поиск, агломеративная кластеризация.

The article deals with the problem which is of relevance nowadays: vehicle routing problem. This problem is considered in order to reduce delivery costs of the distributor. The solution of this problem allows to optimize and reorganize structure of the company and decrease using of recourses. The model of the vehicle routing problem, i. e. the use of different approaches, tools and algorithms to obtain a better result is investigated. Dividing this problem on sub-problems gives opportunity for using different approaches in solving vehicle routing problem. The algorithm for solving the vehicle routing problem is proposed. The main idea of this algorithm is to use agglomerative clustering, tabu search, and union of the clusters sequentially. The program module for every method is developed. There is an opportunity to make use of parallel computing, as a result of clustering-based approach. The proposed algorithm of the vehicle routing problem is checked with solving a real problem. Problem location is defined in Dnipro city. The visualization of every step of solving is presented as combining Google Maps API and JavaScript in web implementation. The quasi-optimal solution of the considered problem is obtained and its robustness is checked. The critical values which lead to rapid increase in the transportation cost is found. Randomly data perturbation is also tested. Graphical implementation for every test is considered to create applied interpretation of results. Research results can be applied to obtain a solution to the vehicle routing problem and reduce delivery costs of the distributor. The idea of creating an interface for software, the use of other clustering algorithms, introduction of another algorithm of union of the clusters, and the use of different approaches for checking the robustness of vehicle routing problem solution is considered as a further research.

**Keywords:** transport routing, heuristic algorithms, robustness of solutions, taboo-search, agglomeration clustering.

**Вступ.** З метою зменшення витрат компанії-дистриб'ютора, у роботі буде розглянута задача маршрутизації транспорту. Розв'язок цієї задачі дозволяє

оптимізувати роботу підприємства та заощадити ресурси. В цій роботі досліджується модель задачі маршрутизації транспорту, а саме використання різних підходів, засобів та алгоритмів з метою отримання кращого результату. Ефективність дослідження цієї теми зумовлена практичною цінністю при великій складності алгоритму розв'язання. Насамперед, спроби комбінування різних етапів розв'язання та застосування для цього різних методів є актуальним і цікавим з метою знаходження нових квазіоптимальних розв'язків за мінімальний час виконання алгоритмів.

Попереднім результатом роботи є публікація [3], у якій було розглянуто логістику українського дистриб'ютора продуктів харчування. Головною метою публікації було зниження витрат компанії у використанні транспорту. Також ефективний алгоритм розв'язання запропоновано у [1]. У роботі була розглянута задача маршрутизації транспорту з обмеженнями, досліджені деякі підходи розв'язання та отримано ефективний алгоритм. Альтернативою запропонованих алгоритмів у роботі [1] стали підходи, наведені у [2]. Був описаний алгоритм розв'язання задачі маршрутизації транспорту та проведена оцінка ефективності.

Результатом застосування запропонованого алгоритму для основної задачі, буде отримання її квазіоптимального розв'язку. Метою дослідження є перевірка робастності розв'язків та вдалості поєднання алгоритмів, що застосовані безпосередньо у роботі.

**Постановка задачі.** Задача маршрутизації транспорту може бути сформульована наступним чином. Нехай  $G = (V, A)$  – граф з ребрами  $A$  який визначається  $A = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ , а  $V = \{0, 1, \dots, N\}$  – множина  $n+1$  вершин, де вершина  $0$  – це депо, а інші вершини – це міста чи клієнти, які будуть обслуговуватися. Для кожного ребра  $(i, j)$ ,  $i \neq j$  задана невід'ємна матриця відстаней  $D = (C_{ij})$ , де  $C_{ij}$  може бути інтерпретовано як справжня відстань, час або вартість подорожі. Маємо  $N$  клієнтів, які повинні бути відвідані  $K$  транспортними засобами. Максимально дозволена довжина маршруту для  $k$ -го транспортного засобу –  $D_k$ . Математичне формулювання задачі:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij} X_{ij}^k \rightarrow \min \quad (1)$$

$$X_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad (2)$$

$$X_{ij}^k = 1, \text{ якщо агент } k \text{ прямує від клієнта } i \text{ до } j; X_{ij}^k = 0, \text{ інакше}$$

Виконуються наступні умови  $\forall i, j = \overline{0, N}; \forall k = \overline{1, K}$ :

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N X_{ij}^k = 1, \sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^N X_{ij}^k = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^N X_{ik} - \sum_{j=0}^N X_{kj} = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij} X_{ij}^k = D_k \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^N X_{i0}^k \leq 1, \quad \sum_{j=0}^N X_{0j}^k \leq 1 \quad (6)$$

Цільовий функціонал (1) визначає загальну вартість розв'язку. Обмеження (3) означають, що всі транспортні засоби, які виїхали з депо повернуться назад. Обмеження (4) гарантує, що кожний клієнт буде точкою зупинки на маршруті. Обмеження (6) відображає наявність хоча б одного транспортного засобу. Розв'язок такої задачі дозволяє мінімізувати транспортні витрати підприємства. Вважатимемо, що на підприємстві на кожному транспортному засобі працює один агент, тобто кількість агентів та кількість транспортних засобів співпадає і дорівнює  $K$ . Нехай  $\delta_i$  відповідає заробітній платні  $i$ -го кур'єра за один робочий день та  $\gamma_i$  – витрати на утримання  $i$ -го транспортного засобу у автопарку. Зазначимо, що це можуть бути витрати на ремонт транспортних засобів або їх прокат. Тоді можна задати витрати пов'язані з заробітною платою та утриманням транспортних засобів наступним чином:

$$R = \sum_{k=1}^K (\gamma_k + \delta_k) = K(\gamma + \delta) \quad (7)$$

$$F = \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij} X_{ij}^k \quad (8)$$

$$Z = F + R \quad (9)$$

Функціонал  $R$  у формулі (7) позначає загальну вартість утримання автопарку. Функціонал  $F$  у формулі (8) відповідає загальній довжині маршруту всієї задачі. У формулі (7) розглядаються ідентичні транспортні засоби та витрати на них. Те ж саме стосується заробітної платні агентів. Тоді в рамках підприємства задачу маршрутизації транспорту з обмеженнями можна представити у вигляді задачі мінімізації функціоналу  $Z$ :

$$Z \rightarrow \min \quad (10)$$

Важливим обмеженням роботи агентів є тривалість робочого дня. Тобто необхідно додати до обмежень наступну умову: час, затрачений на виконання перевезень у рамках одного маршруту повинен не перевищувати тривалість робочого дня  $T$ . Для цього розглянемо наступне обмеження:

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N t_{ij} X_{ij}^k \leq T, \quad k = \overline{1, K} \quad (11)$$

де  $t_{ij}$  розраховується за наступною формулою:

$$t_{ij} = \frac{C_{ij}}{h}, \quad i, j = \overline{0, N}; \quad (12)$$

$h$  - середня швидкість руху у місті

**Метод розв'язання.** Для того, щоб розв'язати задачу маршрутизації транспорту, спробуємо розбити її на частини і запропонувати алгоритми для розв'язання кожної з них. Так як ми маємо декілька транспортних засобів, то було б логічним розділити множину вершин  $V$  на декілька підмножин

$V_i, i = \overline{1, K}$  таких, що  $\bigcup_{i=1}^K V_i = V, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$ , елементи яких знаходились

географічно поряд та їх кількість була обмежена. Тоді б для кожної підмножини  $V_i \subset V, i = \overline{1, K}$  можна було б поставити у відповідність транспортний засіб та агента. Тоді при кількості транспортних засобів  $K$  з множини вершин  $V$  можна отримати наступну множину:

$$W = \{V_1, \dots, V_K\} \quad (13)$$

Тоді для кожного агента постає задача відвідати певну невелику кількість клієнтів, стартуючи з депо і повертаючись назад. При цьому необхідно враховувати обмеження (11) на тривалість робочого дня. Такі міркування відповідають задачі комівояжера: нехай  $G = (V_k, A), V_k \in W$  – граф з ребрами  $A$  який визначається  $A = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V_k, i \neq j\}$ . Для кожного ребра  $(i, j), i \neq j$  задана невід'ємна матриця відстаней  $D = (C_{ij})$ , де  $C_{ij}$  може бути інтерпретовано як справжня відстань, час або вартість подорожі. Тоді має місце наступне формулювання задачі:

$$F = \sum_{i \neq j} C_{ij} X_{ij} \quad (14)$$

за такими обмеженнями:

$$\sum_{i=1}^{|V_k|} X_{ij} = 1, \sum_{j=1}^{|V_k|} X_{ij} = 1, i, j \in V_k, i \neq j \quad (15)$$

$$\sum_{i, j \in S} X_{ij} \leq |S| - 1, (S \subset V_k, 2 \leq |S| \leq |V_k| - 2) \quad (16)$$

$$X_{ij} \in \{1, 0\}, (i, j) \in A \quad (17)$$

Для розв'язання цієї задачі застосуємо евристичний алгоритм табу-пошуку. Крок 1. Нехай задана множина  $V_k = \{x_1, \dots, x_{N_1}\}$ , де  $x_1, \dots, x_{N_1} (N_1 \leq N)$  - точки. Будуємо початковий розв'язок рішення  $s = \{x_1, \dots, x_{N_1}\}$ . Знаходимо довжину цільової функції (14) та записуємо її у  $F_{\min}$ . Позначимо через  $N(s)$  - множину всіх можливих сусідніх вершин. Генеруємо пустий список заборон  $\phi$ . Задаємо число  $K_{\max}$  – кількість можливих ітерацій. Покладаємо  $k = 1$ .



Крок 2. Знаходимо новий розв'язок  $x$  такий, що  $x \in N(s)$ ,  $F(x) = \min_{y \in N(s)} F(y)$ , та перехід з точки  $s$  до точки  $x$  не заборонений або  $F_{\min} > F(x)$ . Переходимо до кроку 3.

Крок 3. Переходимо з точки  $s$  до точки  $x$ . Додаємо точку  $s$  до списку заборон. Змінюємо  $F_{\min} = F(x)$ . Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Перевіряємо обмеження на кількість ітерацій:  $k < K_{\max}$ . Якщо ТАК, то покладаємо  $k = k + 1$  та переходимо до кроку 2. Якщо НІ – переходимо до кроку 5.

Крок 5. Отримали мінімальний результат  $f = F_{\min}$ . Зупиняємось.

Алгоритм описаний.

Використовуючи цей алгоритм, ми можемо розв'язати задачу комівояжера для кожного агента. Слід зазначити, що є декілька варіантів побудови початкового розв'язку  $s$ . Перш за все, було б доцільно побудувати його починаючи з 0 вершини – депо. Однак для подальших міркувань спробуємо спочатку розв'язувати задачу для кожної множини  $V_j (j = \overline{1, K})$ , починаючи з деякої точки. Розглянемо точку  $x_0 = 0$  – депо. Для реалізації цієї ідеї необхідно, згідно з алгоритмом, знати початкову точку маршруту для кожного кластеру  $V_j (j = \overline{1, K})$ . Природньо було б обрати для кожного  $V_j$  таку точку  $p_j \in V_j$ , для якої  $\rho(x_0, y) \rightarrow \min, \forall y \in V_j (j = \overline{1, K})$ , де функцію відстані  $\rho$  можна легко замінити значеннями з матриці відстаней  $D = (C_{ij})$ . Для того, щоб отримати розбиття множини  $W$  по формулі (13), застосуємо алгоритм кластеризації. В рамках роботи був обраний один з алгоритмів ієрархічної кластеризації – агломеративна кластеризація. Агломеративна кластеризація не вимагає конкретизації кількості кластерів, тобто існує можливість вибору кількості кластерів, оскільки будується дерево. Крім того, алгоритм не чутливий до вибору метрики відстані: всі вони, як правило, працюють однаково добре, тоді як з іншими алгоритмами кластеризації вибір метрики відстані є критичним. Нехай задана множина точок  $V = \{1, 2, \dots, N\}$ . Зазначимо, що на цьому етапі депо відокремлюється від загальної множини  $V$ . Опишемо алгоритм агломеративної кластеризації:

Крок 1. Нехай кожний елемент множини  $V$  складає свій власний кластер  $\{V_1, \dots, V_N\}$ . Переходимо до кроку 2.

Крок 2. Об'єднуємо найближчі кластери, наприклад  $V_i$  та  $V_j$ . Переходимо до кроку 3.

Зауважимо, що об'єднання кластерів, застосоване на кроці 2, може бути реалізоване наступним чином: для того, щоб об'єднати кластери  $V_i$  та  $V_j, (i, j = \overline{1, K}; i \neq j)$  необхідно визначити новий кластер  $V_n$ , який буде містити клієнтів обох кластерів  $V_i$  та  $V_j$ ; відстань до депо  $p_n = \min\{p_i, p_j\}, p_i \in V_i$  та  $p_j \in V_j$ ; загальна довжина маршруту складатиме

$f_n = f_i + f_j + \psi_{ij} + \psi_{ji} (i, j = \overline{1, K})$ . При об'єднанні кластерів доречно знати мінімальну відстань між кожним з них. Для цього визначимо квадратну матрицю  $B = (\psi_{ij})$ , де  $\psi_{ij}$  - довжина найкоротшої відстані від кластеру  $V_i$  до кластеру  $V_j$ . Розглянемо алгоритм об'єднання кластерів.

Крок 3. Перевіряємо кількість кластерів  $N$ . Якщо  $N = 1$  або виконаний інший критерій зупинки, то зупиняємось, інакше переходимо до кроку 2.

Для подальшого опису алгоритму введемо відстань  $d(V_i, V_j)$ , яка визначається наступною формулою:

$$d(V_i, V_j) = \frac{\sum_{x \in V_i, x' \in V_j} C(x, x')}{|V_i| \cdot |V_j|}, \quad (i, j = \overline{1, K}) \quad (18)$$

У формулі (18)  $C(x, x') = C_{x, x'}$  позначає відстань між точками  $x$  та  $x'$  з матриці відстаней  $D = (C_{ij})$ . Критерієм зупинки алгоритму є обмеження на мінімальну відстань між кластерами. Результатом застосування алгоритму агломеративної кластеризації буде нова множина  $W = \{V_1, \dots, V_K\}$ , де  $1 \leq K \leq N$ ;  $V_j (j = \overline{1, K})$  – кластер, в якому містяться деякі точки початкової множини  $V = \{1, \dots, N\}$ .

Алгоритм описаний.

Формально  $K$  визначає кількість отриманих кластерів при застосуванні алгоритму агломеративної кластеризації. Отримавши поділ множини  $W$  за (13), постає питання про зменшення кількості агентів та транспортних засобів, що безпосередньо приведе до зменшення витрат (7). Застосуємо обмеження на тривалість робочого дня для кожного кластеру (11). Для кожного елемента  $V_j \in W (j = \overline{1, K})$  знайдемо довжину оптимального шляху  $f_j (j = \overline{1, K})$ , застосувавши алгоритм табу-пошуку.

Нехай задано функціонал загальної вартості  $Z(W)$  за формулою (9), який дорівнює загальній вартості усіх кластерів, які містяться у множині  $W$ .

Примітка. Функціонал  $Z(W)$  може бути визначений як сума значень для всіх  $V_j \in W (j = \overline{1, K})$  та розраховуватися за (9).

Крок 1. Нехай вхідним розв'язком буде множина  $W = \{V_1, \dots, V_K\}$ , яка містить  $K$  кластерів. Нехай існують додаткові множини  $S_{old}$  та  $S_{new}$ . Додамо всі елементи з множини  $W$  до множини  $S_{old}$ .

Крок 2. Обчислимо значення  $cost = Z(S_{old})$ .

Крок 3. Перевіримо кількість елементів:  $|S_{old}| > 1$ . Якщо Ні, то переходимо до кроку 6. Інакше обираємо оптимальну комбінацію кластерів  $V_i$  та  $V_j$ , для яких  $i \neq j$ , об'єднуємо їх та додаємо до  $S_{new}$ . Переходимо до кроку 4.

Крок 4. Перевіримо чи покращився розв'язок:  $\text{cost} > Z(S_{new})$ . Якщо ТАК, то переходимо до кроку 5. Якщо НІ, то переходимо до кроку 6.

Крок 5. Перевіримо обмеження на тривалість робочого дня (11). Якщо за межі 8 годин не вийшли, то замінюємо всі елементи у множині  $S_{old}$  елементами множини  $S_{new}$  та переходимо до кроку 2. Інакше переходимо до кроку 6.

Крок 6. Зупиняємося. Множина  $S_{old}$  та її вартість  $Z(S_{old})$  є новим покращеним розв'язком. Формуємо нову множину  $W^* = \{V_j : V_j \in S_{old}, j = \overline{1, K}\}$ .

Примітка. Під оптимальною комбінацією кластерів можна розуміти поєднання кластерів  $V_i$  та  $V_j$  до тих пір, поки не буде отримана мінімальна вартість  $Z$ .

Алгоритм описаний.

Наведемо загальний алгоритм розв'язання задачі маршрутизації транспорту:

Нехай задана множина  $V = \{1, 2, \dots, N\}$  та точка  $x_0$  - депо. Нехай також відома матриця відстаней  $D = (C_{ij})$ .

Крок 1. Застосуємо до множини  $V = \{1, 2, \dots, N\}$  алгоритм агломеративної кластеризації. В результаті отримаємо множину  $W = \{V_1, \dots, V_K\}$ , де  $V_j \in W (j = \overline{1, K})$  – кластер, який містить в собі деякі точки з початкової множини. Переходимо до кроку 2.

Крок 2. До кожного кластеру  $V_j \in W (j = \overline{1, K})$  застосуємо табу-пошук і отримаємо значення  $f_j (j = \overline{1, K})$  – квазіоптимальна довжина шляху на кластері. Переходимо до кроку 3.

Крок 3. Застосуємо до множини  $W = \{V_1, \dots, V_K\}$  алгоритм об'єднання кластерів і отримаємо множину  $W^* = \{V_j : V_j \in S_{old}, j = \overline{1, K}\}$  та значення  $Z(W^*)$  – квазіоптимальну вартість доставки для задачі маршрутизації транспорту.

Алгоритм описаний.

**Аналіз результатів.** Перевіримо запропонований алгоритм на реальній задачі зменшення витрат компанії-дистриб'ютора. За географічну локацію виберемо м. Дніпро. Кожна географічна точка буде представлена двома координатами довжиною та широтою. За початкову точку  $x_0$  – депо буде обрана точка з наступними координатами:  $x_0 = (\text{lat}, \text{lng}) = (48.458297, 35.055854)$ .

Для точок-клієнтів розглядалися наступні категорії місць: аптеки, кафе, поштові відділення, банки. В рамках роботи загальна кількість точок-клієнтів складає 100 точок. Для отримання даних відстаней між кожною точкою, використовується сервіс Google API Matrix Distance. Для візуалізації процесу розв'язання задачі буде використовуватися веб-інтерфейс інтегрований з

Google Maps API, написаний на мові програмування JavaScript. На рис. 1 зображені всі точки-клієнти, яких необхідно відвідати.

Застосуємо алгоритм кластеризації до вхідних даних: результат зображений на рис. 2. Застосуємо окремо для кожного кластеру процедуру табу-пошуку. За початкову точку на кожному кластері було обрано найближчу точку до  $x_0$  - депо. Для того, щоб отримати вартість відвідання кластеру необхідно використати актуальну вартість пального 30 грн за 1 літр. За транспортний засіб був обраний автомобіль «ГАЗ-3302-XXX» придатний для перевозу товарів вагою до 1.5 тони. Витрата на паливе складає 16 літрів на 100 км. Заробітна плата кур'єрів складає 1200 грн за 1 робочий день. Витрати на утримання автопарку складає 1500 грн. До вартості відвідання кластеру слід додати витрати (7). Результати застосування табу-пошуку наведені у таблиці 1. Загальна вартість доставки товарів на даному етапі становить 30 440 грн. Зменшимо вартість доставки товарів, застосувавши алгоритм об'єднання кластерів. Для цього побудуємо матрицю найменших відстаней  $B = (\psi_{ij})$  між кластерами.



Рис. 1. Зображення точок-клієнтів на карті.



Рис. 2. Застосування алгоритму кластеризації

Таблиця 1

Результат застосування табу-пошуку для кожного кластеру

Номер кластеру	Відстань на кластері, м	Відстань до депо, м	Витрати, грн
0	23307	23307	2930
1	22156	12764	2920
2	46537	4171	3160
3	28904	11696	2980
4	24547	13755	2940
5	58606	646	3280
6	41689	4116	3110
7	31230	8663	3010
8	43312	3702	3130
9	28335	13452	2980
Загалом:			30440

Послідовне застосування алгоритму відображено на рис. 3 та на рис. 4. В результаті було отримано 5 кластерів з загальними витратами на доставку 16791 грн. Зменшення витрат досягається в силу зменшення кількості агентів та транспортних засобів. Таким чином, був отриманий квазіоптимальний розв’язок задачі маршрутизації транспорту з використанням реальних даних за наведеним алгоритмом.

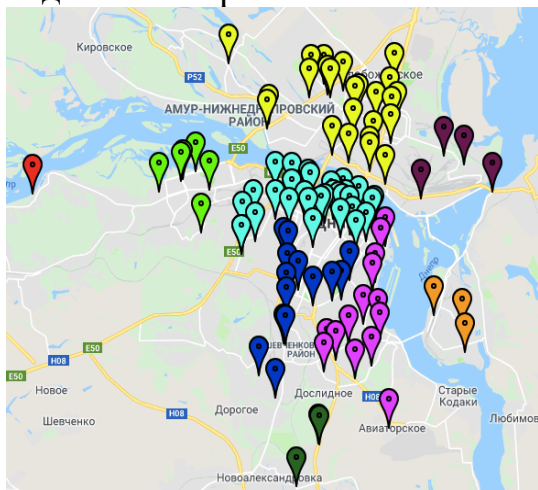


Рис. 3. Друга ітерація процесу об’єднання кластерів.



Рис. 4. Шоста(остання) ітерація процесу об’єднання кластерів.

Перейдемо до перевірки робастності розв’язків цієї задачі. Застосуємо модифікацію для матриці відстаней  $D = (C_{ij})$ , а саме збільшимо кожне значення  $C_{ij} (i, j = \overline{0, N})$  на деякий відсоток. Результат застосування ітераційного процесу зображений на рис. 5. Виділяється різке збільшення вартості розв’язку задачі на проміжку від 100% до 105%, що зумовлюється додаванням ще одного клієнту. Такий результат інтерпретується, як проблеми трафіку у м. Дніпро, які призводять до росту вартості доставки товарів для компанії-дистриб’ютора на 14%.

Таблиця 2

**Процес поєднання кластерів**

№ ітерації	Кількість кластерів, шт.	Перелік кластерів	Затрати, грн.
1	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	30440
2	9	0, 1, (2,4), 3, 5, 6, 7, 8, 9	27709
3	8	(0,3), 1, (2,4), 5, 6, 7, 8, 9	24959
4	7	(0,3), (1,8), (2,4), 5, 6, 7, 9	22216
5	6	(0,3), (1,8), (2,4,7), 5, 6, 9	19493
6	5	(0,3), (1,8), (2,4,7), (5, 6), 9	16791

Примітка. Позначення типу (1,2,...) у таблиці 2 відповідає одному кластеру та несе інформацію про номери кластерів, що об’єднуються та їх порядок.

Для визначення загальної поведінки розв'язку задачі маршрутизації транспорту оцінимо ріст вартості при випадковому невеликому (не більше 10%) збуренні кожної відстані матриці  $D = (C_{ij})$ . Також залишимо деякий статичний крок збільшення на кожному етапі – 10%.

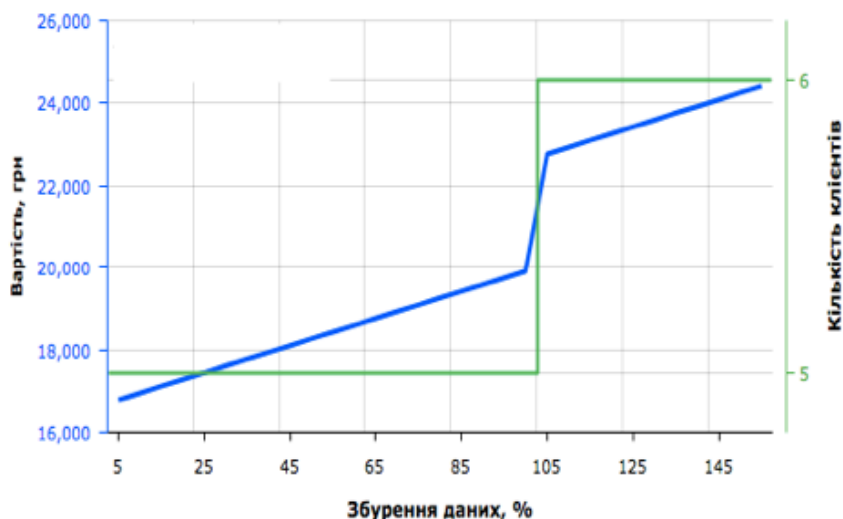


Рис. 5. Залежність росту вартості розв'язку задачі від відсотку збурення даних

Результати такого аналізу зазначені на рис. 7. На кожному етапі збільшення процес повторювався 10 разів та обиралися мінімальне, середнє та максимальне значення вартості розв'язку задачі. Отримані результати свідчать про те, що в разі довільних перебоїв трафіку вартість розв'язку зростає нелінійно. Для найгіршого випадку не помічено різкої зміни вартості. Кожен перегин для випадку максимальної вартості відповідає появі нового агенту та транспортного засобу. Для мінімального випадку існує значення при збуренні на 70-90% з'являється спад вартості розв'язку задачі маршрутизації транспорту, який відповідає зменшенню кількості кур'єрів і транспортного засобу. В середньому алгоритм показує рівномірне зростання при випадкових збуреннях випадкових ділянок доріг.

Спробуємо по черзі збільшувати мінімальні відстані до кожного кластеру і визначати яке збурення призведе до найгіршого результату. Графічний результат такого збурення даних зображено на рис. 6. Отриманий результат свідчить, що існує кластер, при віддаленні якого вартість отриманого розв'язку задачі зростає на 16%. На рис. 9 відтворений мінімальний маршрут між цими кластерами, який лежить через Південний міст.

Отримане різке збільшення вартості розв'язку задачі можна інтерпретувати як не тільки віддалення кластерів один від одного, а й ще як дорожні проблеми на маршруті А-В.

У випадку перекриття Південного мосту, розв'язок задачі збільшується на 16%. Слід зауважити, що в цьому випадку не враховується зміни загального трафіку при перекритті Південного мосту.



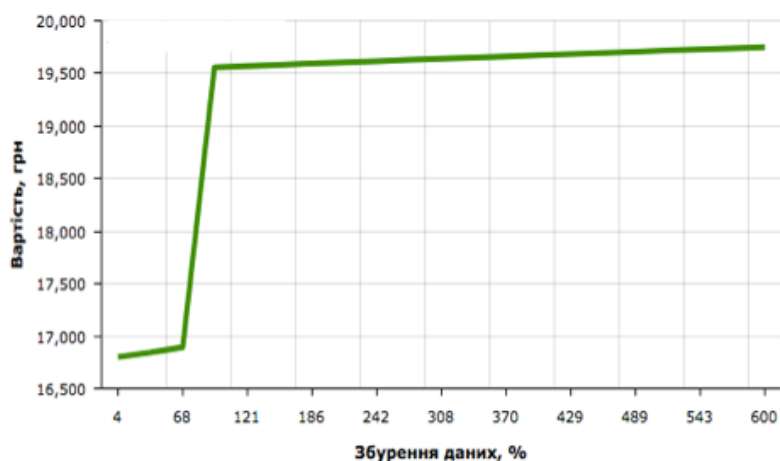


Рис. 6. Залежність росту вартості розв'язку задачі від збурення мінімальних відстаней між кластерами

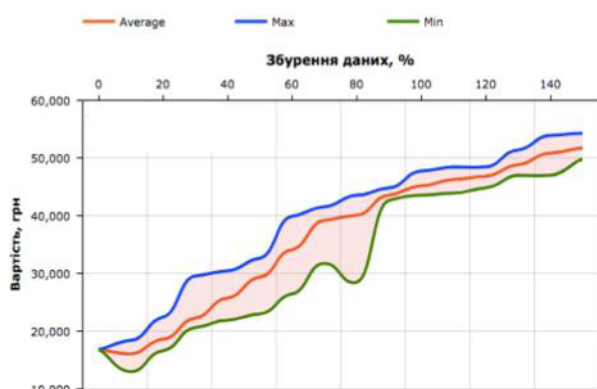


Рис. 7. Залежність росту вартості розв'язку задачі від відсотку випадкового збурення даних

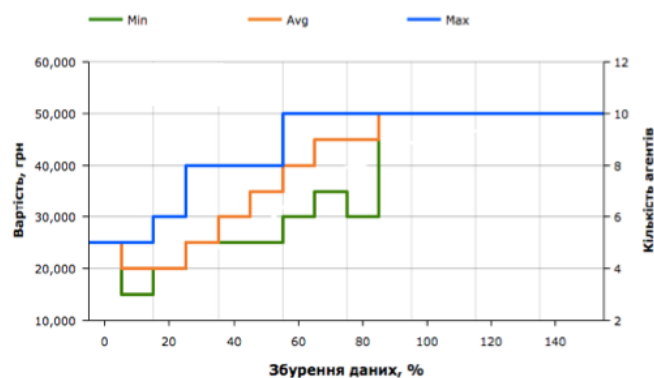


Рис. 8. Кількість клієнтів для мінімального, середнього та максимального випадку.

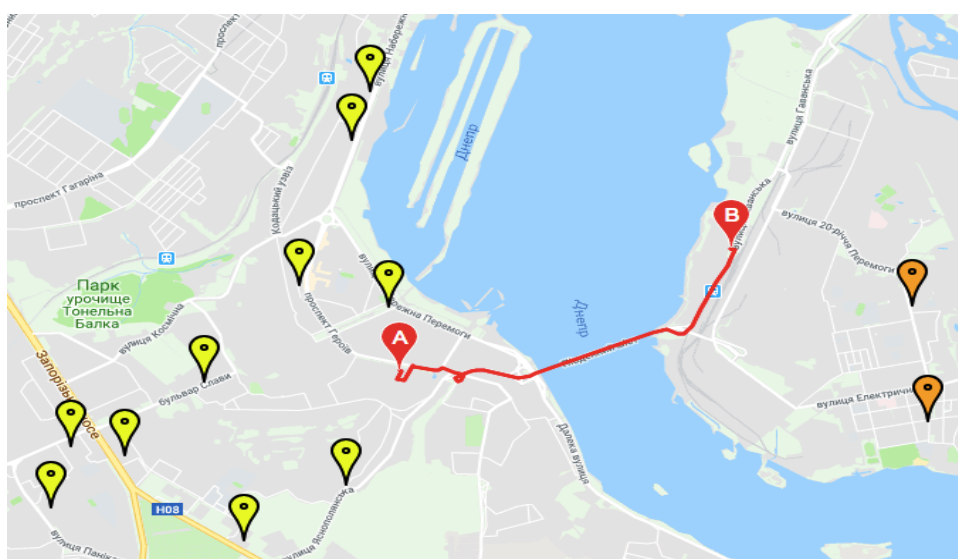


Рис. 9. Географічне зображення мінімального маршруту між кластерами 1 та 8.

**Висновки.** Запропоновано алгоритм розв'язання задачі маршрутизації транспорту, який поділяє процес розв'язання на декілька послідовних етапів. Проведена перевірка робастності розв'язків задачі на реальному прикладі. Знайденні значення збурення за яких наявний швидкий зріст вартості розв'язку задачі. Результати дослідження можуть бути застосовані для отримання розв'язку задачі маршрутизації транспорту та зменшення витрат компанії-дистриб'ютора. Для подальших досліджень розглядається ідея створення інтерфейсу для програмного забезпечення, використання інших алгоритмів кластеризації, використання нових підходів для оцінки робастності розв'язків задачі.

#### Бібліографічні посилання

1. **Abbas I.** Solving CVRP by Using Two-stage (DPSOTS) Algorithm / I. Abbas, A. Hassan. // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – №13.
2. **Korablev V.** Approaches to Solve the Vehicle Routing Problem in the Valuables Delivery Domain / V. Korablev, I. Makeev, E. Kharitovon. // Procedia Computer Science. – 2016. – №88. – С. 487–492.
3. **Kuznietsov K. A.** Cluster-based supply chain logistics: a case study of a Ukrainian food distributor / K. A. Kuznietsov, V. A. Gromov, V. A. Skorohod. // IMA Journal of Management Mathematics. – 2017. – №28. – С. 553–578.

*Надійшла до редколегії: 10.10.2018.*



**В.А.Перепелица<sup>\*</sup>, Э.В.Терещенко<sup>\*\*</sup>, А.Е.Рябенко<sup>\*\*</sup>**

*<sup>\*</sup>Запорожский национальный университет, <sup>\*\*</sup>Запорожский национальный технический университет*

### **КВАЗИПОЛНОТА КЛАССА ЗАДАЧ НА ГРАФАХ «ВЕС-МИНИМАКСНОЕ РЕБРО»**

Доказана теорема о квазиполноте двукритериальных задач на графах, целевая функция которых состоит из условий «вес-минимаксное ребро», причем по первому критерию допустимые решения имеют постоянное число ребер. Предложена методика изучения свойств, структуры и оценки мощностей множества допустимых решений, паретовского множества и полного множества альтернатив задач выделенного класса. Предложены полиномиальные алгоритмы решения изучаемых задач.

**Ключевые слова:** многокритериальная оптимизация, паретовское множество, полное множество альтернатив, квазиполная задача.

Задачі багатокритеріальної оптимізації в загальній постановці не мають очевидного рішення, що породжує безліч підходів у визначенні найбільш «вдалого» з деякої сукупності рішень, які відповідають поставленим умовам. Одним із шляхів формального визначення множини можливих альтернативних рішень є виділення паретовської множини, множини непокращуваних альтернатив. Свою продуктивність підтвердив шлях вивчення деяких класів багатокритеріальних задач, цільові функції яких мають певні властивості. Була введена концепція повних задач, для яких виконується рівність множини допустимих рішень, множини Парето і повного набору альтернатив.

У попередніх роботах авторами введено поняття квазіповноти. У статті виділено клас двокритеріальних задач. Допустиме рішення за першим критерієм в цих задачах має постійне число ребер, і цільова функція містить критерій ваги і критерій мінімаксного ребра. Представниками цього класу обрані задача на графі загальної структури та задача на дводольному графі, допустимі рішення яких мають постійну кількість ребер. Сформована методика вивчення властивостей і оцінки потужностей допустимої множини рішень, паретовської множини і повної множини альтернатив для задач виділеного класу. Доведено теорему про квазіповноту задач виділеного класу. Отримано оцінки для двох представників цього класу: «про остовне дерево і мінімаксне ребро», «про досконале паросполучення на дводольному графі і мінімаксне ребро». Запропоновано поліноміальні алгоритми вирішення досліджуваних задач. Дано оцінки обчислювальної складності цих алгоритмів.

**Ключові слова:** багатокритеріальна оптимізація, паретовська множина, повна множина альтернатив, квазіповна задача.

The tasks of multi-criteria optimization in the general formulation do not have a trivial solution, which gives rise to a multitude of approaches in determining the most “successful” solution from a certain set of solutions that satisfy the problem conditions. One of the ways of formal defining of the possible alternative solution set is to isolate the Pareto set, i.e. the set of unimprovable alternatives. The previously developed approach

was applied for studying some classes of multi-criteria problems, the objective functions of which have certain properties, and its productivity was confirmed. The concept of complete problems was introduced, for which the equality of the sets of feasible solutions, the Pareto and the full set of alternatives was fulfilled. In previous works, the authors introduced the concept of quasi-completeness. In the article the class of two-criterion problems, for which the admissible solution for the first criterion has a constant number of edges, and objective function contains the criterion of weight and the criterion of the minimax edge, is distinguished. The problem on the graph of the general structure and the problem on the bichromatic graph, for which the feasible solutions have a constant number of edges, were selected as representatives of this class. A method for studying the properties and estimating the powers of an admissible set of solutions, a Pareto set and a complete set of alternatives for the problems of the selected class, has been formulated. A theorem on the quasi-completeness for the selected class problems is proved. There were obtained estimates for two representatives of this class: “about a spanning tree and a minimax edge”, “about a perfect matching on a bichromatic graph and a minimax edge”.

Polynomial algorithms for solving the problems under study are proposed. Estimates of the computational complexity of these algorithms are given.

**Keywords:** multi-criteria optimization, Pareto set, full set of alternatives, quasi-complete problem.

**Введение.** Задачи многокритериальной оптимизации в общей постановке не имеют тривиального решения, что порождает множество подходов в определении наиболее «удачного» из некоторой совокупности решений, удовлетворяющих поставленным условиям. Одним из путей формального определения множества возможных альтернативных решений является выделение паретовского множества, множества неулучшаемых альтернатив [1]. В работах [4,7] продемонстрированы возможности использования полного множества альтернатив, выделяемого из паретовского множества. Свою продуктивность подтвердил путь изучения некоторых классов многокритериальных задач, целевые функции которых обладают определенными свойствами. Так было введено понятие полных задач, для которых выполнялось равенство множеств допустимых решений, паретовского и полного множества альтернатив. Были определены классы полных задач [2,4,6,7].

В статье [5] авторами введено понятие квазиполноты, сформулированы необходимые и достаточные условия наличия свойства полноты и квазиполноты для класса двукритериальных задач, целевая функция которых объединяет два однотипных условия «вес-вес». Проведен анализ структуры и оценки мощностей множества допустимых решений (МДР), паретовского множества (ПМ) и полного множества альтернатив (ПМА).

Материал представленной статьи отражает следующий этап по изучению свойств двукритериальных задач на графах с определенными свойствами целевой функции. Статья посвящена изучению класса двукритериальных задач на графах, целевая функция которых объединяет разнотипные условия «вес-критическое ребро». Представителями этого класса выбраны задача на графе общей структуры и задача на двудольном графе, допустимые решения которых имеют постоянное количество ребер. Предложена методика

изучения свойств, структуры и оценки мощностей МДР, ПМ, ПМА, а также полиномиальные алгоритмы решения изучаемых задач.

**Постановка задачи.** Символом  $Z_\gamma$ ,  $\gamma = \overline{1,3}$  будем обозначать сформулированную на  $n$ -вершинном графе  $G = (V, E)$  однокритериальную задачу нахождения экстремального значения суммы весов ребер:  $Z_1$  - об остовных деревьях,  $Z_2$  - о совершенных паросочетаниях на двудольном графе с равными долями. Для задачи  $Z_2$  условимся, что множество вершин  $V$  графа  $G = (V, E)$  распадается на два равномоощных непересекающихся подмножества  $V^1, V^2$ ,  $V^1 \cap V^2 = \emptyset$ ,  $V = V^1 \cup V^2$ . Внутри подмножеств  $V^1, V^2$  вершины несмежны. В этом случае граф  $G = (V, E)$  двудольный, и  $V^1, V^2$  - множества вершин соответственно первой и второй долей. Задачи  $Z_1$  и  $Z_2$  относятся к классу задач, допустимые решения которых имеют постоянное число ребер. Символом  $Z_3$  будем обозначать сформулированную на  $n$ -вершинном графе  $G = (V, E)$  однокритериальную задачу нахождения минимального значения максимального веса ребра, назовем эту задачу «о минимаксном ребре».

Множество всех допустимых решений задачи  $Z_\gamma$  с индивидуальным критерием  $F_\gamma(x)$  обозначим через  $X_\gamma = \{x_\gamma\}$ , где  $x_\gamma = (V_\gamma, E_\gamma)$  - подграф графа  $G$ ,  $V_\gamma \subseteq V$ ,  $E_\gamma \subseteq E$ ,  $\gamma$  - индивидуальный номер критерия. Символом  $Z_{\gamma_1, \gamma_2}$  будем обозначать двухкритериальную задачу на двухвзвешенном  $n$ -вершинном  $m$ -реберном графе с критериями  $F_{\gamma_i}(x) \rightarrow extr$ ,  $i = \overline{1,2}$  векторной целевой функции  $F_{\gamma_1, \gamma_2}(x_{\gamma_1, \gamma_2})$ . Индексы  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1,2}$  обозначают индивидуальные номера критериев, причем порядок критериев  $F_{\gamma_i}(x)$ , определяет очередность решения задач  $Z_{\gamma_i}$ .

Для двухкритериальных задач примем обозначения:  $X_{\gamma_1, \gamma_2} = \{x \mid x = x_{\gamma_1, \gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}), x_{\gamma_1} \in X_{\gamma_1}, x_{\gamma_2} \in X_{\gamma_2}\}$  - МДР задачи  $Z_{\gamma_1, \gamma_2}$ , где  $x_{\gamma_1, \gamma_2} = (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2})$  - допустимое решение задачи  $Z_{\gamma_1, \gamma_2}$ , представляющее собой два подграфа  $x_{\gamma_i} = (V, E_{\gamma_i})$ ,  $i = \overline{1,2}$  данного графа  $G = (V, E)$ ,  $E_{\gamma_i} \subseteq E$ ;  $|X_{\gamma_1, \gamma_2}|$  - мощность множества  $X_{\gamma_1, \gamma_2}$ ;  $\tilde{X}_{\gamma_1, \gamma_2}$  - паретовское множество двухкритериальной задачи  $Z_{\gamma_1, \gamma_2}$ ,  $\tilde{X}_{\gamma_1, \gamma_2} \subseteq X_{\gamma_1, \gamma_2}$ ;  $X^0_{\gamma_1, \gamma_2}$  - полное множество альтернатив, которое определяется как подмножество ПМ  $X^0_{\gamma_1, \gamma_2} \subseteq \tilde{X}_{\gamma_1, \gamma_2}$  минимальной мощности  $|X^0_{\gamma_1, \gamma_2}|$  и такое, что  $F_{\gamma_1, \gamma_2}(X^0_{\gamma_1, \gamma_2}) = F_{\gamma_1, \gamma_2}(\tilde{X}_{\gamma_1, \gamma_2})$  [4].

Многокритеріальну задачу  $Z_{\gamma_1, \gamma_2}$  назовем квазіполною, якщо для МДР  $X_{\gamma_1, \gamma_2}$  існують такі параметри векторної цільової функції (ВЦФ)  $F(x)$ , при яких максимальні потужності МДР, ПМ і ПМА підчинені співвідношенню  $|X_{\gamma_1, \gamma_2}^0| = |\tilde{X}_{\gamma_1, \gamma_2}| < |X_{\gamma_1, \gamma_2}|$  [5].

Присвоїмо кожному ребру  $e_t \in E$ ,  $t = \overline{1, m}$   $n$ -вершинного графа  $G = (V, E)$ ,  $|E| = m$  пару ваг  $\omega_i(e_t)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $t = \overline{1, m}$ .

Виділимо клас двукритеріальних задач, ВЦФ яких складається з критерія ваги і мінімаксного ребра:

$$F(x) = (F_{\gamma_1}(x), F_{\gamma_2}(x)) = (F_{\gamma_1}(x), F_4(x)), \quad (1)$$

$$F_{\gamma_1}(x) = \omega_1(x_{1,4}) = \omega_1(x_1) = \sum_{e \in E_{x_1}} \omega_1(e) \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$F_3(x_{1,3}) = \max_{e \in E_{x_1}} \omega_2(e) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Особенністю задач виділеного класу є те, що кожне з допустимих рішень  $x_{\gamma_i}$ ,  $i = \overline{1, 2}$  окремо складається з одного типу підграфів графа  $G$ , таких як остовне дерево, совершенне паросочетання і ребро. Причому, типи підграфів  $x_{\gamma_1}$  і  $x_{\gamma_2}$  не збігаються.

Дальніший матеріал присвячений вивченню структури МДР  $X_{\gamma_1, 3} = \{x_{\gamma_1, 3}\}$ , ПМ  $\tilde{X}_{\gamma_1, 3}$ , ПМА  $X_{\gamma_1, 3}^0$ ,  $\gamma_1 = 1, 2$ , потужностей цих множин на основі множин допустимих рішень і  $X_3$  відповідних однокритеріальних задач  $Z_{\gamma_1}$  і  $Z_3$  з цільовими функціями  $F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1})$ ,  $F_3(x_3)$ . Отримані результати дозволять зробити висновок про наявності або відсутності властивостей повноти або квазіповноти для задач виділеного класу  $Z_{\gamma_1, 3}$ ,  $\gamma_1 = 1, 2$ .

**Метод рішення.** Побудуємо алгоритм  $\alpha$  рішення задачі  $Z_{\gamma_1, 3}$ ,  $\gamma_1 = 1, 2$ . На першому етапі алгоритма  $\alpha$  формується МДР  $X_{\gamma_1} = \{x_{\gamma_1}^\mu\}$ ,  $|X_{\gamma_1}| = M$ ,  $\mu = \overline{1, M}$  задачі  $Z_{\gamma_1}$ , відповідне індексу  $\gamma_1$ . Кожне допустиме рішення  $x_{\gamma_1}^\mu \in X_{\gamma_1}$  представляє собою підграф  $x_{\gamma_1}^\mu = (V_{\gamma_1}^\mu, E_{\gamma_1}^\mu)$  графа  $G = (V, E)$ ,  $V_{\gamma_1}^\mu \subseteq V$ ,  $E_{\gamma_1}^\mu \subseteq E$ . На другому етапі за значенням другого ваги  $\omega_2(e)$ ,  $e \in E_{x_{\gamma_1}^\mu}$  на кожному підграфі  $x_{\gamma_1}^\mu$ ,  $\mu = \overline{1, M}$  вирішується задача про знаходження ребра максимального ваги  $\omega_2(e_{extr}^\mu) = \max_{e \in E_{x_{\gamma_1}^\mu}} \omega_2(e)$ . Застосувавши цей прийом для кожного номера  $\mu \in [1, M]$ , формуємо МДР  $X_{\gamma_1, 3} = \{x_{\gamma_1, 3}\}$  задачі  $Z_{\gamma_1, 3}$ . Для кожного допустимого рішення  $x_{\gamma_1, 3}$  значення цільової функції визначено в вигляді

пары  $(F_{\gamma_1}(x^\mu), F_3(x^\mu))$ , где  $F_{\gamma_1}(x^\mu) = \omega_1(x_{\gamma_1}^\mu)$ ,  $F_3(x^\mu) = \omega_2(e_{extr}^\mu)$ . На третьем этапе из МДР выделяется ПМ  $\tilde{X}_{\gamma_1,3}$  согласно критериям (2)-(3).

Рассмотрим структуру МДР  $X_{\gamma_1,3}$ , ПМ  $\tilde{X}_{\gamma_1,3}$  и ПМА  $X_{\gamma_1,3}^0$  задач  $Z_{\gamma_1,3}, \gamma_1 = 1, 2$ . В графе  $G = (V, E)$  ребра  $e \in E$  перенумеруем числами  $t = t(e) = \overline{1, m}$ ,  $m = |E|$ . Для каждого ребра  $e_t \in E$  определим первый и второй вес следующим образом:

$$\omega_1(t) = 2^t, \omega_2(t) = r_0 - \omega_1(t), t = t(e) = \overline{1, m}, m = |E|, r_0 = 2^{m+1}. \quad (4)$$

Взвешивание (4) обеспечивает равные суммы первых весов ребер только для совпадающих по множеству ребер подграфов. Поэтому выделенные на первом этапе решения задач  $Z_{\gamma_1,3}, \gamma_1 = 1, 2$  попарно различные подграфы  $X_{\gamma_1} = \{x_{\gamma_1}^\mu\}$ ,  $|X_{\gamma_1}| = M$ ,  $\mu = \overline{1, M}$  не имеют совпадающих значений по критерию (2).

Первой из выделенного класса рассмотрим задачу  $Z_{1,3}$  «об остовных деревьях и минимаксном ребре».

Изучим структуру МДР  $X_{1,3}$ , ПМ  $\tilde{X}_{1,3}$  и ПМА  $X_{1,3}^0$  с критериями (1)-(3) при  $\gamma_1 = 1$ . Мощность МДР  $X_{1,3}$  задачи  $Z_{1,3}$  определяется мощностью МДР  $X_1$  задачи  $Z_1$ , которая решается на первом этапе алгоритма  $\alpha$ . Множество  $X_1 = \{x_1^\mu\}$  объединяет остовные деревья  $x_1^\mu = (V, E_1^\mu)$ ,  $E_1^\mu = n - 1$ ,  $\mu = \overline{1, M}$   $n$ -вершинного графа  $G = (V, E)$ ,  $|E| = m$ ,  $E_1^\mu \subset E$ ,  $n - 1 \leq m$ . Максимальная мощность МДР достигается на полном графе и определяется формулой Кэли  $n^{n-2}$  [4].

Сформируем разбиение МДР  $X_{1,3} = \{x_1^\mu\}$ ,  $x_1^\mu = (V, E_1^\mu)$  на подмножества  $X^{i,3}$ ,  $i = 1, (m - n + 2)$  по признаку «наименьший номер  $t(e)$  ребра  $e \in E_1^\mu$ »,  $X_{1,3} = \bigcup_{i=1, (m-n+2)} X^{i,3}$ ,  $X^{i,3} \cap X^{j,3} = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq m - n + 2$ ,  $1 \leq j \leq m - n + 2$ .

Согласно взвешиванию (4), на элементах подмножества  $X^{i,3}$  целевая функция  $F(x_1^\mu)$  будет принимать различные значения по критерию  $F_1(x_1^\mu)$ . Ребра каждого остовного дерева подмножества  $X^{i,3}$ ,  $1 \leq i \leq (m - n + 2)$  упорядочим «по возрастанию номеров  $t(e)$  ребер  $e \in E_1^\mu$ » на позициях от 1 до  $n - 1$ . Пусть решения  $x_1^\zeta = (V_1^\zeta, E_1^\zeta)$  и  $x_1^\nu = (V_1^\nu, E_1^\nu)$  отличаются только ребрами  $e_{t_\zeta}$  и  $e_{t_\nu}$  на  $n - 1$  позиции с наибольшими номерами  $t_\zeta$  и  $t_\nu$  при  $1 \leq t_\nu < t_\zeta \leq M$ , т.е.  $E_1^\zeta \setminus e_{t_\zeta} = E_1^\nu \setminus e_{t_\nu}$ . Согласно взвешиванию (4),  $\omega_1(e_{t_\zeta}) > \omega_1(e_{t_\nu})$ , что означает  $F_1(x_1^\zeta) > F_1(x_1^\nu)$ .

Согласно правилам формирования подмножества  $X^{i,3}$ , на его элементах целевая функция  $F(x_1^\mu)$  будет принимать совпадающие значения по

критерию  $F_3(x_1^{\mu})$  (3). Ребро, занимающее первую позицию, имеет наименьший номер  $t(e)$  и максимальный вес  $\omega_2$ . Следовательно, по критерию (3) решения  $x_1^{\zeta}$  и  $x_1^{\nu}$  совпадают  $F_4(x_1^{\zeta}) = \omega_2(e_{\max}^{\zeta}) = F_4(x_1^{\nu}) = \omega_2(e_{\max}^{\nu})$ . Решением, которое может войти в ПМ, является только одно из двух, а именно  $x_1^{\zeta}$ . Таким образом, справедливо неравенство  $|\tilde{X}_{1,3}| < |X_{1,3}|$ .

Для каждого подмножества  $X_{1,3}^i$  определим единственное решение  $x_1^i$ , отвечающее критериям (2) и (3). Из множества решений  $\{x_1^i\}, i = 1, (m - n + 2)$  выделим ПМ. Является справедливым неравенство  $|\tilde{X}_{1,3}| \leq m - n + 2$ . Очевидно выполнение равенства мощностей ПМ и ПМА  $|\tilde{X}_{1,3}| = |X_{1,3}^0|$ . Следовательно, можно утверждать, что для задачи  $Z_{1,3}$  в постановке (1)-(3) при  $\gamma_1 = 1$  выполняется соотношение квазиполноты  $|\tilde{X}_{1,3}| = |X_{1,3}^0| < |X_{1,3}|$ . Заметим, что при частном случае взвешивания (4) обеспечивается единственность решения ПМ и ПМА  $|\tilde{X}_{1,4}| = |X_{1,4}^0| = 1$ . Действительно, в остовном дереве  $x_1^{\mu}$  критерий  $F_3(x_1^{\mu})$  определяется «наименьшим номером  $t(e)$  ребра  $e \in E_1^{\mu}$ ». Но это означает, что для выполнения условия максимального значения критерия  $F_1(x_1^{\mu})$ , ребро с наибольшим номером принадлежит множеству  $E_1^{\mu}$  обязательно.

Делаем вывод, что является справедливой

**Теорема 1.** Задача  $Z_{1,3}$  «об остовных деревьях и минимаксном ребре» на  $n$ -вершинном графе  $G = (V, E)$ ,  $|E| = m$  с векторной целевой функцией (1)-(3) для  $\gamma_1 = 1$  является квазиполной, т.е. выполняется соотношение квазиполноты  $|\tilde{X}_{1,3}| = |X_{1,3}^0| < |X_{1,3}|$ . Причем мощность МДР не превышает количества остовных деревьев в полном  $n$ -вершинном графе  $|X_{1,3}| \leq n^{n-2}$ , а для мощностей ПМ и ПМА неравенство выполняется  $|\tilde{X}_{1,3}| = |X_{1,3}^0| \leq m - n + 2$ .

Рассмотрим задачу  $Z_{2,3}$  «о совершенном паросочетании в двудольном графе и минимаксном ребре» в постановке (1)-(3) при  $\gamma_1 = 2$ . Для анализа структуры МДР  $X_{2,3}$ , ПМ  $\tilde{X}_{2,3}$  и ПМА  $X_{2,3}^0$  повторим принятый выше ход рассуждений. Мощность МДР задачи  $Z_{2,3}$  определяется мощностью множества допустимых решений задачи  $Z_2$ , т.е. количеством совершенных паросочетаний  $x_2^{\mu} = (V, E_2^{\mu})$ ,  $|E_2^{\mu}| = n/2$  на двудольном графе  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $|E| = m$ ,  $|V_1| = |V_2| = n/2$ ,  $E_2^{\mu} \subset E$ . Количество совершенных паросочетаний на двудольном графе  $G$  определяется

перманентом матриці смежностей двудольного графа  $perA_{n \times n}$ . Максимальна потужність МДР досягається на повному графі  $G$  при  $|E| = m = \binom{n}{2}$  і визначається формулою  $\binom{n}{2}$  ! [6].

Сформуємо розбиття МДР  $X_{2,3} = \{x_2^\mu\}$ ,  $x_2^\mu = (V, E_2^\mu)$  на підмножества  $X_{2,3}^i$ ,  $i = \overline{1, \frac{n}{2}}$  по признаку «найменший номер  $t(e)$  ребра  $e \in E_2^\mu$ »,  $X_{2,3} = \bigcup_{i=1, (m-n+1)} X_{2,3}^i$ ,  $X_{2,3}^i \cap X_{2,3}^j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq m - \frac{n}{2} + 1$ ,  $1 \leq j \leq m - \frac{n}{2} + 1$ . На елементах підмножества  $X_{2,3}^i$  цільова функція  $F(x_2^\mu)$  буде приймати різні значення по критерію  $F_2(x_2^\mu)$ . Упорядочимо ребра кожного совершенного паросочетання множення  $X_2 = \{x_2^\mu\}$  на позиціях від 1 до  $\frac{n}{2}$ . Два совершенних паросочетання  $x_2^\xi = (V, E_2^\xi)$  і  $x_2^\nu = (V, E_2^\nu)$  можуть відрізнятися мінімум двома парами ребер, стоящими на двох передостанніх позиціях  $\frac{n}{2} - 1$  і  $\frac{n}{2}$ . Згідно зважуванню (4), буде виконуватися одне з нерівностей  $F_2(x_2^\xi) > F_2(x_2^\nu)$  або  $F_2(x_2^\xi) < F_2(x_2^\nu)$ . По правилах побудови підмножества  $X_{2,3}^i$  цільова функція  $F(x_2^\mu)$  буде приймати збігаючі значення по критерію  $F_3(x_2^\mu)$ , т.е. виконується співвідношення  $F_3(x_2^\xi) = \omega_2(e_{\max}^\xi) = F_3(x_2^\nu) = \omega_2(e_{\max}^\nu)$ . Розв'язком, яке може увійти в ПМ, є тільки одне з двох. Таким чином, справедливо нерівність  $|\tilde{X}_{2,3}| < |X_{2,3}|$ . Для кожного підмножества  $X_{2,3}^i$  визначимо єдине рішення  $x_2^i$ . З множення рішень  $\{x_2^i\}$ ,  $i = \overline{1, \frac{n}{2}}$  виділимо ПМ. Виконується нерівність  $|\tilde{X}_{2,3}| \leq \frac{n}{2}$ . Рівність потужностей ПМ і ПМА  $|\tilde{X}_{2,3}| = |X_{2,3}^0|$  справедливо. Отже, можна стверджувати, що для задачі  $Z_{2,3}$  в постановці (1)-(3) при  $\gamma_1 = 3$  виконується співвідношення квазіповноти  $|\tilde{X}_{2,3}| = |X_{2,3}^0| < |X_{2,3}|$ .

Справедлива наступна

**Теорема 2.** Задача  $Z_{2,3}$  «о совершенном паросочетании в двудольном графе и минимаксном ребре» на двудольном графе  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $|E| = m$ ,  $|V_1| = |V_2| = \frac{n}{2}$  с векторной целевой функцией (1)-(3) при  $\gamma_1 = 2$  является квазіповной, т.е. виконується співвідношення квазіповноти  $|\tilde{X}_{2,3}| = |X_{2,3}^0| < |X_{2,3}|$ . Причому потужність МДР не перевищує кількості

совершенных паросочетаний на полном на двудольном графе  $|X_{2,3}| \leq (n/2)!$ , а мощности ПМ и ПМА имеют верхнюю границу  $|\tilde{X}_{2,3}| = |X^0_{2,3}| \leq n/2$ .

Обобщим полученные результаты.

**Теорема 3.** Двукритериальная задача  $Z_{\gamma_1,3}$  с векторной целевой функцией (1)-(3), допустимое решение которой по критерию  $\gamma_1$  имеет постоянное число ребер, является квазиполной, т.е. справедливо соотношение  $|X^0_{\gamma_1,3}| = |\tilde{X}_{\gamma_1,3}| < |X_{\gamma_1,3}|$ . Мощность МДР  $X_{\gamma_1,3}$  определяется мощностью МДР задачи  $Z_{\gamma_1}$ . ПМ совпадает с ПМА. Мощность ПМ и ПМА определяется количеством классов разбиения МДР по признаку «наибольший второй вес ребра». Верхней границей мощностей ПМ и ПМА является количество ребер графа  $G$ .

Рассмотрим алгоритм решения задачи  $Z_{1,3}$ , который имеют полиномиальную сложность. На первом этапе ребра упорядочиваются по значению второго веса  $\omega_2(e)$ ,  $e \in E$ ,  $|E| = m$  за  $O(m \log(m))$  операций. Далее повторяем  $|E| = m$  раз процедуру построения максимального остовного дерева алгоритмом Краскала ( $O(m \log(m))$ ) с использованием первых весов ребер  $\omega_1(e)$  при условии обязательного наличия ребра, очередного в массиве, упорядоченном на первом этапе [3]. Из полученных решений формируем ПМ  $\tilde{X}_{1,3}$  за  $O(m)$  операций. Алгоритм решения задачи  $Z_{1,3}$  имеет вычислительную сложность  $O(m \log(m))(1+m) + O(m) < O(m^4)$ .

Аналогично для решения задачи  $Z_{2,3}$ :  $|E|$  раз повторяется процедура построения совершенных паросочетаний на двудольном графе алгоритмом с вычислительной сложностью  $O(n^3)$  [3]. Алгоритм решения задачи  $Z_{2,3}$  имеет вычислительную сложность  $O(n \log(n)) + |E|O(n^3) < O(n^5)$ .

**Выводы.** В статье сформулирована теорема о квазиполноте двухкритериальных задач, имеющих постоянное число ребер допустимого решения по первому критерию, целевая функция которых содержит критерий веса и критерий минимаксного ребра. Сформирована методика изучения свойств и оценки мощностей допустимого множества решений, паретовского множества и полного множества альтернатив для задач выделенного класса. Получены оценки для двух представителей этого класса: «об остовном дереве и минимаксном ребре», «о совершенном паросочетании на двудольном графе и минимаксном ребре». Предложены полиномиальные алгоритмы решения этих задач с оценкой вычислительной сложности.

#### Библиографические ссылки

1. Pareto V. Manuel d'economic politique . Giard. Paris, 1909.



2. **Емеличев, В.А.** Сложность дискретных многокритериальных задач [Текст] / В.А.Емеличев, В.А. Перепелица // Дискретная математика. – 1994. – Вып.1(6). – С.3–33.
3. **Кормен, Т. Х.** Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн . — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.
4. **Перепелица, В.А.** Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах [Текст] / В.А. Перепелица. — Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 337с.
5. **Перепелица, В.А.** О полных и квазиполных двухкритериальных задачах на графах [Текст] / В.А. Перепелица, Э.В. Терещенко // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – №3. – С.51–57.
6. **Перепелица, В.А.** Об одном классе многокритериальных задач на графах и гиперграфах [Текст] / В.А. Перепелица // Кибернетика. –1984. –№4. –С.62-67.
7. **Сергиенко В.А., Перепелица В.А.** К проблеме нахождения множеств альтернатив дискретных многокритериальных задач [Текст]/ В.А. Сергиенко, В.А. Перепелица // Кибернетика. –1987. –№5. –С.85-93.

*Надійшла до редколегії 22.09. 2018.*

**А.С. Титяпкин., В.Э. Волков**

*Одесская национальная академия пищевых технологий*

## **ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ**

Рассмотрены проблемы исследования устойчивости плоской стационарной детонационной волны. Показано, что граничные условия для двухфронтной модели позволяют оценить основные параметры внутренней структуры газовой детонации. Такая модель может служить основой для разработки математического и программного обеспечения интеллектуальной системы поддержки принятия решений по проблемам взрывобезопасности и взрывозащиты.

**Ключевые слова:** устойчивость, детонационная волна, граничные условия.

Розглянуто проблеми дослідження стійкості плоскої стаціонарної детонаційної хвилі. Показано, що граничні умови для двухфронтної моделі дозволяють оцінити основні параметри внутрішньої структури газової детонації. Така модель може служити основою для розробки математичного та програмного забезпечення інтелектуальної системи підтримки прийняття рішень з питань вибухобезпеки і вибухозахисту. Виконано спробу систематизувати проблему встановлення граничних умов при вивченні стійкості детонаційної хвилі з метою подальшого створення системи підтримки прийняття рішень з проблем вибухобезпеки та вибухозахисту.

Розглянуто наступні моделі плоскої стаціонарної детонаційної хвилі, для яких здійснюється постановка задачі про стійкість:

1) модель детонації Чепмена-Жуге є найпростішою моделлю, в якій ударно-детонаційний фронт моделюється прямим стрибком ущільнення, і всі хімічні перетворення відбуваються миттєво, безпосередньо на фронті;

2) двухфронтна (одноступенева) модель заснована на припущенні, що хімічні перетворення також відбуваються миттєво, але не на провідному ударному фронті, а в деякій площині (так званому фронті миттєвого згоряння), який відділений від провідного ударного фронту зоною індукції;

3) багатоступенева модель, яка апроксимує безперервний розподіл параметрів за провідним ударним фронтом кусочно-постійною функцією;

4) модель з безперервним розподілом параметрів за провідним ударним фронтом, яка найбільш точно відображає реальні фізичні процеси в стаціонарній детонаційній хвилі.

Ці моделі принципово відрізняються граничними умовами, яким задовольняють малі збурення в області, що розділяє області вихідного горючого середовища та продуктів детонації. Переваги та недоліки описаних вище моделей оцінюються з точки зору правильності фізичного аналізу процесу детонації та з точки зору придатності для математичного забезпечення ІСППР з проблем вибухобезпеки та вибухозахисту. Показано, що граничні умови для двухфронтної моделі дозволяють оцінити основні параметри внутрішньої структури газової детонації. Така модель може служити основою для розробки математичного та програмного забезпечення ІСППР по проблемам вибухобезпеки та вибухозахисту.

**Ключові слова:** стійкість, детонаційна хвиля, граничні умови.

The research's problems of a plane stationary detonation wave's stability are considered. It is shown that the boundary conditions for the two-front model allow estimating the main parameters of the internal structure of gas detonation. Such a model can serve as the basis for development of mathematical support and software for an intellectual decision support system for the problems of explosion-proof and explosion protection.

An attempt has been made to systematize the problem of setting boundary conditions in studies of the stability of a detonation wave in order to further create a decision support system (DSS) on problems of explosion safety and explosion protection.

The following models of a plane stationary detonation wave were considered, which the stability problem is stated for:

1) the Chapman-Jouget detonation model is the simplest model where the shock-detonation front is modeled by a direct shock wave, and all chemical transformations are assumed to occur instantaneously, directly at the front;

2) a two-front (single-stage, square-wave) model based on the assumption that chemical transformations also occur instantaneously, not on the leading shock front, but in a plane (called the instantaneous combustion front), which is separated from the leading shock front by the induction zone;

3) a multistage model that approximates the continuous distribution of parameters behind the leading shock front piecewise constant function;

4) a model with a continuous distribution of parameters behind the leading shock front, which most accurately reflects the real physical processes in a stationary detonation wave.

These models are fundamentally different in boundary conditions, which small perturbations in the region separating the regions of the initial combustible medium and detonation products satisfy. The advantages and disadvantages of the models described above are both assessed from the standpoint of the correctness of the physical analysis of the detonation process and from the point of view of applicability for the mathematical support of DSS on problems of explosion safety and explosion protection.

It is shown that the boundary conditions for the two-front model allow to estimate the main parameters of the internal structure of the gas detonation. Such model can be as the basis for the development of mathematical support and software of DSS for problems of explosion safety and explosion protection.

**Keywords:** stability, detonation wave, boundary conditions.

**Введение.** К настоящему времени опубликовано значительное количество работ, посвященных теоретическим исследованиям устойчивости плоской стационарной детонационной волны в газовых смесях [1-6]. Результаты этих исследований позволяют оценить теоретически [6-9] основные элементы пространственно-временной (пульсационной) структуры детонационной волны, наблюдаемые экспериментально [10-13], в первую очередь – внутренние характеристические масштабы (размер детонационной ячейки, частоту пульсаций). В данной работе сделана попытка систематизировать проблему постановки граничных условий в исследованиях устойчивости детонационной волны с целью дальнейшего создания интеллектуальной системы поддержки принятия решений (ИСППР) по проблемам взрывобезопасности и взрывозащиты [14].

**Постановка задачі.** Рассмотрим различные модели плоской стационарной детонационной волны, для которых осуществляется постановка задачи об устойчивости, а именно:

1) модель детонации Чепмена-Жуге – простейшая модель, в которой ударно-детонационный фронт моделируется прямым скачком уплотнения [11,15]. При этом предполагается, что все химические превращения происходят мгновенно, непосредственно на фронте;

2) двухфронтная (одноступенчатая) модель (рис. 1), основанная на предположении, что химические превращения также происходят мгновенно, но не на ведущем ударном фронте, а в некоторой плоскости (называемой фронтом мгновенного сгорания), которая отделена от ведущего ударного фронта зоной индукции, в которой осуществляется «подготовка» химических превращений с тепловыделением [11];

3) многоступенчатая модель, аппроксимирующая непрерывное распределение параметров за ведущим ударным фронтом кусочно-постоянной функцией (рис. 2);

4) модель с непрерывным распределением параметров за ведущим ударным фронтом, которая наиболее точно отображает реальные физические процессы в стационарной детонационной волне.

Эти модели принципиально отличаются граничными условиями, которым, при решении задачи об устойчивости, удовлетворяют малые возмущения в области, разделяющей области исходной горючей среды и продуктов детонации. Задача состоит в том, чтобы оценить достоинства и недостатки описанных выше моделей как с позиций корректности физического анализа детонационного процесса, так и с точки зрения применимости для математического обеспечения ИСППР по проблемам взрывобезопасности и взрывозащиты.

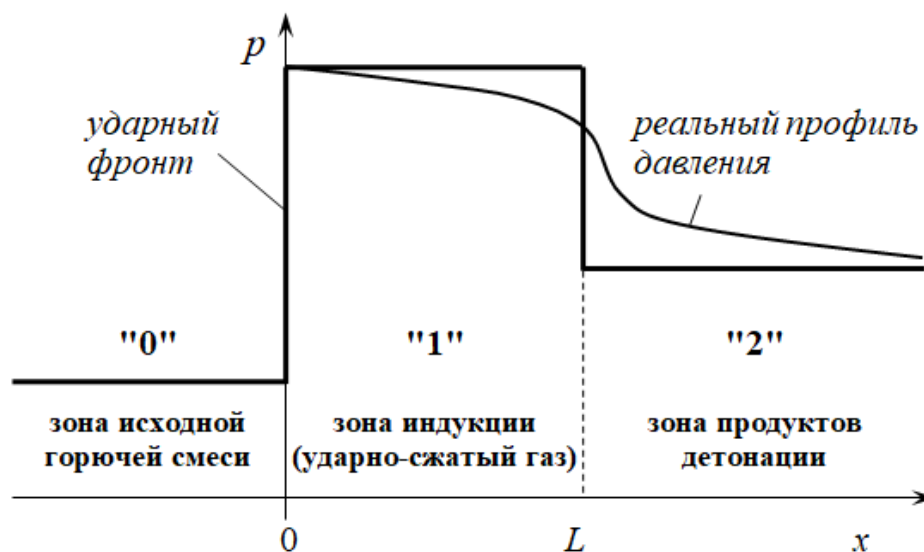


Рис. 1. Схематический профиль давления в двухфронтной модели детонационной волны

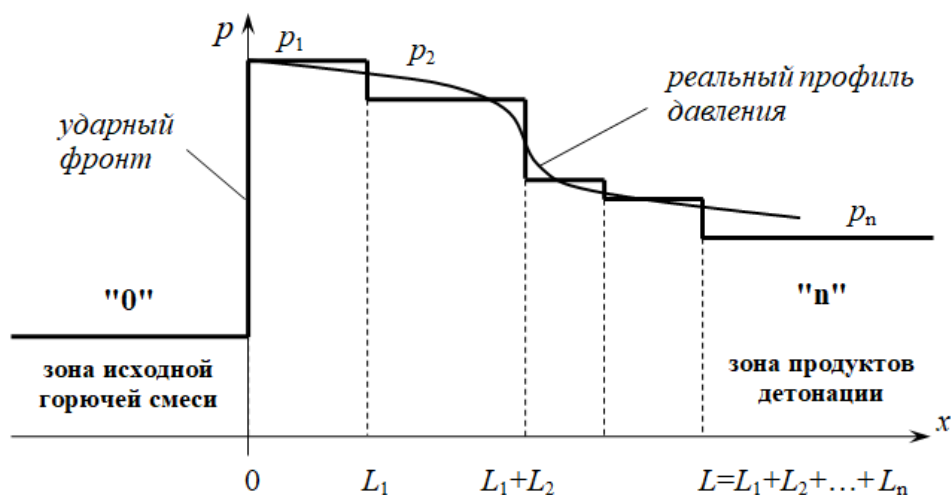


Рис. 2. Схематический профиль давления в многоступенчатой модели детонационной волны

**Решение задачи об устойчивости плоской детонационной волны.** Математическое исследование устойчивости плоской детонационной волны для любой из перечисленных выше моделей сводится к следующему алгоритму действий:

- система газодинамических уравнений (которым удовлетворяют параметры потока в стационарной детонационной волне), представляющая собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, линеаризуется;

- выбор вида искомых малых возмущений (рассматриваются только возмущения экспоненциального типа) позволяет перейти от системы линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений; нахождение общего решения этой системы уравнений позволяет записать частные решения линеаризованной системы уравнений с частными производными;

- подстановка частных решений в линеаризованные граничные условия (которыми являются законы сохранения массы, импульса и энергии) позволяет получить систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неопределенных констант из общего решения системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Условие нетривиальности решения системы линейных однородных алгебраических уравнений приводит к характеристическому уравнению относительно некоторого параметра (собственного числа), знак которого позволяет делать выводы об устойчивости или неустойчивости детонационной волны.

Рассмотрим первые два пункта приведенного выше алгоритма исследования устойчивости плоской детонационной волны в применении к моделям 1)-3).

Основное течение идеального (невязкого) сжимаемого газа, описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными Эйлера, неразрывности и баланса энергии, которые в предположении отсутствия массовых сил в двумерном случае имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} + u_y \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + u_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $p, \rho$  – давление и плотность,  $u_x, u_y$  – проекции скорости на координатные оси  $x, y$ ,  $h$  – удельная энтальпия (теплосодержание).

При этом предполагается, что зависимость  $h = h(p, \rho)$  известна и представляет собой одну из форм уравнения состояния газа. В случае совершенного газа с точностью до произвольной аддитивной постоянной:

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + const, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

где  $\gamma$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме.

Однородный поток газа, движущийся в направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $u_j$ , полностью определяется постоянными параметрами  $p_j$  и  $\rho_j$ , удовлетворяющим стационарным законам сохранения массы, импульса и энергии, причем  $h_j(p_j, \rho_j)$  – также постоянная величина. Налагая на это основное течение малые возмущения, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_j + u'_{jx}(x, y, t), \quad u_y = u'_{jy}(x, y, t), \\ p = p_j + p'_{jx}(x, y, t), \quad \rho = \rho_j + \rho'_{jx}(x, y, t), \quad h = h_j + h'_j(x, y, t) \end{array} \right. \quad (2)$$

Подставляя в (1) выражения для возмущений (2) и пренебрегая малыми членами второго порядка и выше, получим линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u'_x}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u'_y}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_y}{\partial x} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + u_j \frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_j \left( \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + u_j \frac{\partial p'}{\partial x} - a_j^2 \frac{\partial p'}{\partial t} - a_j^2 u_j \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где  $a_j$  – скорость звука.

Частные решения системы (3) ищем в виде:

$$\begin{cases} u'_x = u_1 U(hx) \exp(iky - i\omega t) \\ u'_y = u_1 W(hx) \exp(iky - i\omega t) \\ p' = \rho_1 R(hx) \exp(iky - i\omega t) \\ p' = \rho_1 u_1^2 P(hx) \exp(iky - i\omega t) \end{cases}, \quad (4)$$

где  $h = 2\pi / \lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны возмущения ( $\lambda > 0$ ),  $\omega$  – комплексная (вообще говоря) величина,  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ),  $\rho_1, u_1$  – характерные плотность и скорость,  $U, W, R, P$  – безразмерные величины (функции безразмерной величины  $hx$ ).

Подстановка (4) в (3) приводит к системе обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $U, W, R, P$ , общее решение которой содержит четыре неопределенные константы  $A_{jl}$  ( $l = 1, 2, 3, 4$ ). Соответственно, частные решения системы (3) представляются в виде суперпозиции четырех типов возмущений, соответствующих тем же четырем неопределенным константам:

$$\frac{u'_{jx}}{u_1} = \left[ -\frac{k_{j1}}{\frac{z}{\delta_j} + k_{j1}} A_{j1} \exp(k_{j1}hx) - \frac{k_{j2}}{\frac{z}{\delta_j} + k_{j2}} A_{j2} \exp(k_{j2}hx) + A_{j3} \exp(k_{j3}hx) \right] \exp(ihy - i\omega t)$$

$$\frac{u'_{jy}}{u_1} = \left[ -\frac{i}{\frac{z}{\delta_j} + k_{j1}} A_{j1} \exp(k_{j1}hx) - \frac{i}{\frac{z}{\delta_j} + k_{j2}} A_{j2} \exp(k_{j2}hx) - i \frac{z}{\delta_j} A_{j3} \exp(k_{j3}hx) \right] \exp(ihy - i\omega t)$$

$$\frac{p'_j}{\rho_1} = \left[ \frac{M_j^2}{\delta_j^2} A_{j1} \exp(k_{j1}hx) + \frac{M_j^2}{\delta_j^2} A_{j2} \exp(k_{j2}hx) + A_{j4} \exp(k_{j4}hx) \right] \exp(ihy - i\omega t), \quad (5)$$

$$\frac{p'_j}{\rho_1 u_1^2} = \left[ A_{j1} \exp(k_{j1}hx) + A_{j2} \exp(k_{j2}hx) \right] \exp(ihy - i\omega t)$$

где  $k_{jl} = \frac{1}{1 - M_j^2} \left[ \frac{z}{\delta_j} M_j^2 - (-1)^l \sqrt{1 - M_j^2 + \left( \frac{z}{\delta_j} M_j \right)^2} \right] \quad (l=1, 2), \quad z = -\frac{i\omega}{hu_1},$

$\delta_j = \frac{\rho_1}{\rho_j} = \frac{u_j}{u_1}, \quad M_j^2 = \frac{u_j^2}{a_j^2}$  – число Маха.

Возмущение «1» (соответствующее  $A_{j1}, k_{j1}$ ) и возмущение «2» (соответствующее  $A_{j2}, k_{j2}$ ) являются акустическими возмущениями, для которых  $p' \neq 0$ . В частном случае одного измерения (когда  $h=0$  и  $u'_y=0$ ) акустические возмущения представляют собой совокупность реальных физически, распространяющихся навстречу друг другу плоских звуковых волн. Возмущение «3» (соответствующее  $A_{j3}, k_{j3} = -\frac{z}{\delta_j}$ ), для которого  $p' = 0$  и  $\rho' = 0$ , представляет собой так называемое вихревое возмущение. Возмущение «4» (соответствующее  $A_{j4}, k_{j3} = k_{j4} = -\frac{z}{\delta_j}$ ), для которого  $u'_x = u'_y = 0, p' = 0$ , но  $\rho' \neq 0$ , представляет собой так называемое энтропийное возмущение. В самом деле, если представить термодинамическое уравнение состояния газа в виде  $\rho = \rho(p, s)$ , то очевидно, что единственной причиной,



вызывающей возмущение плотности при отсутствии возмущения давления, может быть только возмущение энтропии.

**Граничные условия на ударно-детонационном фронте в модели Чепмена-Жуге.** Классическая модель стационарной детонационной волны Чепмена-Жуге описывает детонацию прямым скачком уплотнения с тепловыделением (за счет изменения химического состава), при этом толщина зоны реакции предполагается пренебрежимо малой. Поверхность разрыва, совмещенная с осью  $Oy$ , разделяет исходную газовую смесь ( $x < 0$ , параметры с индексом «0») и продукты детонации ( $x > 0$ , параметры с индексом «2»). В стационарном состоянии законы сохранения массы, импульса и энергии для совершенного газа имеют на этой поверхности следующий вид:

$$\begin{cases} u_0 \rho_0 = u_2 \rho_2 \\ p_0 + \rho_0 u_0^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2} + Q = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \end{cases}, \quad (6)$$

где  $Q$  – удельное тепловыделение при химической реакции. К уравнениям (6) добавляется условие Чепмена-Жуге самоподдерживающейся детонации  $u_2^2 = a_2^2 = \frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2}$  [11,16].

Если в силу каких-либо случайных причин (химических неоднородностей в исходной смеси и т.п.) возникают малые возмущения параметров потока, то фронт детонационной волны искривляется, в результате чего поверхность разрыва испытывает слабое возмущение в виде малого смещения вдоль оси  $Ox$ :

$$\varepsilon(y, t) = A_0 \frac{1}{h} \exp(ihy - i\omega t), \quad (7)$$

где  $A_0$  – произвольная постоянная.

В силу сверхзвуковой скорости детонации область исходной газовой смеси «0» свободна от возмущений. Граничные условия на возмущенной поверхности разрыва имеют вид линеаризованных законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \frac{1}{u_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \frac{u'_{2x}}{u_0} + \delta \frac{\rho'_2}{\rho_0} &= 0 \\ \frac{p'_2}{\rho_0 u_0^2} + 2 \frac{u'_{2x}}{u_0} + \delta^2 \frac{\rho'_2}{\rho_0} &= 0 \\ \frac{u'_{2y}}{u_0} + (\delta - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= 0 \\ (1 - \delta) \frac{1}{u_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \delta \frac{u'_{2x}}{u_0} + \frac{\delta \gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{p'_2}{\rho_0 u_0^2} - \frac{1}{M_2^2} \frac{\delta^3}{\gamma_1 - 1} \frac{\rho'_2}{\rho_0} &= 0 \end{aligned} \right. , \quad (8)$$

где  $\delta = \frac{u_2}{u_0} = \frac{\rho_0}{\rho_2}$ .

Подставляя частные решения (5) и (7) в граничные условия (8), имеем характеристическое уравнение для нахождения собственного числа  $z$ :

$$(1 - M_2^2) \left( \lambda + \frac{z}{\delta} \right) \left( 1 - \frac{z^2}{\delta} \right) = 2z \left( 1 - \frac{z^2}{\delta^2} \right) \left[ 1 + \frac{(\gamma_2 - 1)(\delta - 1)}{2\delta} M_2^2 \right] \quad (9)$$

Анализ уравнения (9) показывает, что в случае реальных газовых смесей невозможно сделать вывод как об устойчивости, так и о неустойчивости детонации, но остается возможность нейтральных колебаний, представляющая собой так называемый сомнительный случай в теории устойчивости, который требует нелинейного анализа [1,2]. Математически такая ситуация обусловлена применением граничных условий (8), которые сводят задачу об устойчивости детонационной волны к задаче об устойчивости ударной волны. Очевидна необходимость учета в исследованиях устойчивости детонационной волны кинетики химических превращений и внутренней структуры зоны детонации.

**Граничные условия для двухфронтной (одноступенчатой) модели стационарной детонационной волны.** Двухфронтная модель (рис. 2) представляет стационарную детонационную волну в идеальном газе в виде комплекса из ударной волны и следующего за ней на определенном расстоянии  $L$  фронта мгновенного сгорания с характерным временем индукции (задержки воспламенения)  $\tau = L / u_1$  [11]. В системе координат, связанной с детонационным фронтом выделяются три области течения: исходная смесь, ударно-сжатый газ и продукты детонации. Возникновение малых возмущений искривляет как ударный фронт, так и фронт мгновенного сгорания, изменяя протяженность зоны индукции. Линеаризованные граничные условия имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left[ (\delta_1 - 1) \frac{1}{u_0} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{u'_{1x}}{u_0} + \delta_1^2 \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right]_{x=0} = 0 \\
 & \left[ \frac{p'_1}{\rho_0 u_0^2} + 2 \frac{u'_{1x}}{u_0} + \delta_1^2 \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right]_{x=0} = 0 \\
 & \left[ \frac{u'_{1y}}{u_0} + (\delta_1 - 1) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \right]_{x=0} = 0 \\
 & \left[ (1 - \delta_1) \frac{1}{u_0} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \delta_1 \frac{u'_{1x}}{u_0} + \frac{\delta_1 \gamma_1}{\gamma_1 - 1} \frac{p'_1}{\rho_0 u_0^2} - \frac{1}{M_1^2} \frac{\delta_1^3}{\gamma_1 - 1} \frac{\rho'_1}{\rho_0} \right]_{x=0} = 0 \\
 & \left[ \frac{u'_{1x}}{u_1} + \frac{\rho'_1}{\rho_1} - \frac{\delta - 1}{\delta} \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{1}{\delta} \frac{u'_{2x}}{u_1} - \delta \frac{\rho'_2}{\rho_1} \right]_{x=L} = 0 \\
 & \left[ \frac{p'_1}{\rho_1 u_1^2} + 2 \frac{u'_{1x}}{u_1} + \frac{\rho'_1}{\rho_1} - \frac{p'_2}{\rho_1 u_1^2} - 2 \frac{u'_{2x}}{u_1} - \delta^2 \frac{\rho'_2}{\rho_1} \right]_{x=L} = 0 \\
 & \left[ \frac{u'_{1y}}{u_1} - \frac{u'_{2y}}{u_1} - (\delta - 1) \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} \right]_{x=L} = 0 \\
 & \left[ \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \frac{p'_1}{\rho_1 u_1^2} - \frac{1}{M_1^2} \frac{1}{\gamma_1 - 1} \frac{\rho'_1}{\rho_1} + \frac{u'_{1x}}{u_1} + (\delta - 1) \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} - \frac{\delta \gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{p'_2}{\rho_1 u_1^2} + \frac{1}{M_2^2} \frac{\delta^3}{\gamma_2 - 1} \frac{\rho'_2}{\rho_1} - \delta \frac{u'_{2x}}{u_1} \right]_{x=L} = 0
 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

При этом, как и в модели Чепмена-Жуге, в области исходного состояния «0» возмущения отсутствуют.

Кинетика химической реакции накладывает на возмущения требование [3], которое носит название уравнения обратной связи:

$$u_1 \int_t^{t+\tau} \left[ \gamma_1 M_1^2 (Q + N) \frac{p'_1}{\rho_1 u_1^2} - N \frac{\rho'_1}{\rho_1} - \frac{u'_{1x}}{u_1} \right]_{x=u_1(t'-t)} dt' - \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t + \tau) = 0 \quad (11)$$

где  $Q = \left. \frac{\partial \ln f}{\partial \ln p} \right|_{p=p_1, T=T_1}$ ,  $N = \left. \frac{\partial \ln f}{\partial \ln T} \right|_{p=p_1, T=T_1}$ ,  $f(p, T)$  – скорость химической реакции;

$\varepsilon_1(y, t) = A_{00} \frac{1}{h} \exp(ihy - i\omega t)$ ,  $\varepsilon_2(y, t) = A_{01} \frac{1}{h} \exp(ihy - i\omega t)$  – смещения разрывов в возмущенном состоянии, ударного фронта и фронта воспламенения соответственно.

Уравнение обратной связи (11) записано в несколько ином виде, чем в [3] по причине иного выбора неизвестных функций в системе (1) (в работе [3] в качестве неизвестной функции рассматривается энтропия, а не плотность).

Подстановка частных решений линеаризованных газодинамических уравнений основного течения (5) в граничные условия (10) и уравнение обратной связи (11), приводит к линейной однородной системе девяти алгебраических уравнений, условие нетривиальности решения которой порождает характеристическое уравнение для собственных значений  $.z = -i\omega t.$ , полученное в виде равенства нулю определителя 9-го порядка. Теоретический анализ корней этого уравнения [3,4,6], позволил сформулировать критерии неустойчивости детонационной волны, а также оценить элементы детонационной структуры и пределы детонации [6-8,14]. Таким образом, применение двухфронтной модели (и соответствующих граничных условий) к исследованию неустойчивости и структуры детонационной волны является весьма продуктивным. Однако данная модель обладает двумя существенными недостатками.

Во-первых, двухфронтная модель стационарной детонационной волны неадекватно отображает физические процессы при детонации конденсированных взрывчатых веществ (КВВ) [17]. Профиль давления в детонационной волне в КВВ близок к треугольному (Рис. 3), поэтому он никоим образом не может быть аппроксимирован распределением давлений, характерным для двухфронтной модели. Химические превращения с интенсивным тепловыделением при детонации КВВ начинаются непосредственно за ведущим ударным фронтом (ввиду чрезвычайно высоких значений давления и температуры), поэтому зона индукции как таковая отсутствует. Следовательно, двухфронтная модель стационарной детонационной волны более или менее адекватно отображает только физические процессы в газовой детонации (причем не только в задачах об устойчивости), а исследование на устойчивость детонации КВВ требует применения модели с непрерывным распределением параметров за ведущим ударным фронтом [9,18,19].

Во-вторых, двухфронтная модель стационарной детонационной волны искусственно привносит в стационарный процесс прямой скачок разрежения с тепловыделением, который, сам по себе являясь неустойчивым [20-22], может служить существенным фактором дестабилизации всего детонационного комплекса в целом, хотя сжимаемость среды является существенным стабилизирующим фактором [9,18,19].

Граничные условия (10) на поверхности фронта мгновенного сгорания  $x=L$  представляют собой линеаризованные законы сохранения на этом фронте и совпадают с граничными условиями на возмущенном фронте пламени, который неустойчив как в несжимаемой [20,21], так и в сжимаемой [22] среде, хотя сжимаемость среды является существенным стабилизирующим фактором [22,23].

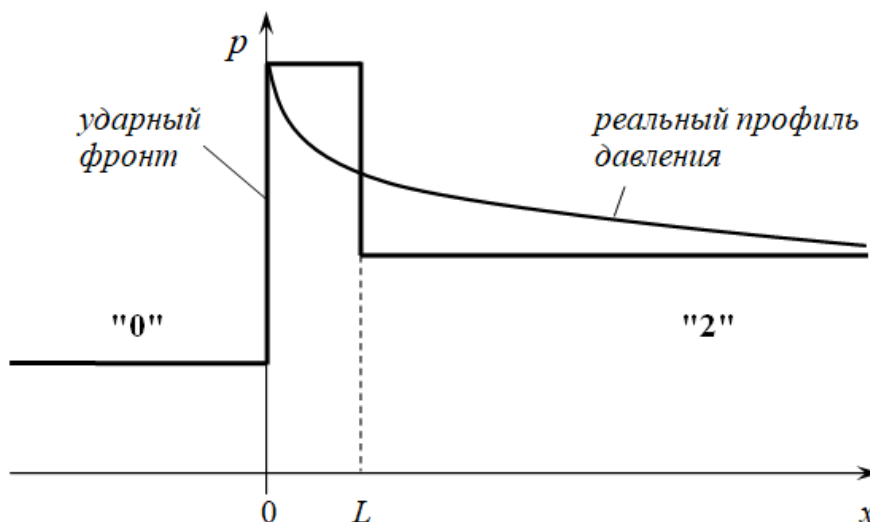


Рис. 3. Схематический профиль давления в детонационной волне, распространяющейся в КВВ

**Граничные условия для многоступенчатой модели стационарной детонации.** В работах [4,5] предложена многоступенчатая модель детонационной волны (рис. 2), приближенно описывающая непрерывное распределение параметров за фронтом ведущей ударной волны. Стационарный детонационный комплекс при этом включает в себя кроме ведущего ударного фронта систему последовательно расположенных за ним фронтов мгновенно протекающих химических реакций, разделенных интервалами с характерными временами задержки. Авторы [4,5] описывают звенья ступенчатого (кусочно-постоянного) распределения параметров внутри стационарного детонационного комплекса как последовательные этапы одной и той же химической реакции, либо различные промежуточные реакции с энергиями активации  $E_1, E_2, \dots$ . Однако такое представление является искусственным, так как при горении все этапы любой химической реакции протекают параллельно, а не последовательно [24,25]. Такая модель содержит набор искусственно созданных скачков разрежения и потому не более стабильна, чем двухфронтная. Граничные условия в этом случае представляются набором из законов сохранения на ведущем ударном фронте (4 условия) и на  $n$  поверхностях слабого разрыва ( $4n$ ), а также  $n$  уравнениями обратной связи. Поскольку введение каждого интервала требует выполнения пяти граничных условий (четыре закона сохранения и уравнение обратной связи), то, с учетом четырех законов сохранения на ведущем ударном фронте, определитель, которым выражается характеристическое уравнение, имеет порядок  $5n+4$ , где  $n$  — число интервалов (при  $n=1$  имеем двухфронтную модель).

Рассмотренная попытка аналитически исследовать устойчивость детонационной волны с произвольным профилем давления на основе многоступенчатой модели детонации является неудачной. Такая модель детонации не в полной мере отражает непрерывность распределения термо- и газодинамических параметров за ведущим ударным фронтом. Очевидно, что

переход к пределу при стремящемся к бесконечности количестве «ступеней» за ведущим ударным фронтом не обеспечивает переход к модели с непрерывным распределением параметров за этим фронтом.

Кроме того, случай, когда число «ступеней» больше 2-х, представляет собой серьезную проблему с точки зрения математического анализа ввиду быстрого роста порядка характеристического определителя. Таким образом, многоступенчатая модель стационарной детонации не позволяет произвести полноценный анализ устойчивости и структуры детонационной волны, распространяющихся в конденсированных и газовых средах.

**Граничные условия для модели стационарной детонации с непрерывным распределением параметров за ведущим ударным фронтом.** Как указано выше, модель стационарной детонации с непрерывным распределением параметров за ведущим ударным фронтом наиболее точно отображает реальные физические процессы, протекающие в детонационной волне. При этом к системе газодинамических уравнений (1) добавляется уравнение химической кинетики, включающее в себя в качестве неизвестной функции массовую долю непрореагировавшего вещества [24,25]. Общее число граничных условий в этом случае минимизируется: оно включает в себя линеаризованные законы сохранения на ведущем ударном фронте и условие равенства нулю на ударном фронте возмущения массовой доли непрореагировавшего вещества, которое заменяет уравнение обратной связи и основывается на предположении, что (ввиду малости возмущений) реакция в возмущенном состоянии протекает таким же образом, как и в невозмущенном. Соответствующий характеристический определитель имеет всего лишь 5-ый порядок, однако решение линеаризованной системы уравнений с частными производными сводится к решению системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными, а не с постоянными коэффициентами. Такая задача с точки зрения современной математики в общем виде неразрешима аналитически [26]. Принципиально иной подход к анализу устойчивости детонационной волны с непрерывным распределением параметров за ведущим ударным фронтом [9,16,18,19] основан на применении метода Эйлера [26,27] для приближенного аналитического решения указанной выше системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и позволяет оценить параметры внутренней структуры детонации как газовых, так и конденсированных систем. При этом впервые доказана устойчивость детонации твердых КВВ (например, литого тротила), наблюдаемая экспериментально [17]. Однако, данная модель представляется слишком сложной для оценки устойчивости и расчета структуры газовой детонации.

**Анализ полученных результатов.** Для оценки параметров структуры газовой детонации наиболее эффективной представляется двухфронтная модель детонационной волны. Расчеты, произведенные для ряда газовых смесей при различных начальных условиях, приводят к совпадению с экспериментальными данными [11,12,13] с точностью до 30%.

**Выводы.** Таким образом, граничные условия в исследованиях устойчивости плоской стационарной детонационной волны в идеальном газе:

- для модели Чепмена-Жуге – не позволяют дать оценку устойчивости или неустойчивости газовой детонации;
- для многоступенчатой модели, аппроксимирующей непрерывное распределение параметров за фронтом ударной волны, – приводят к значительному росту порядка характеристического определителя и не отражают суть физических процессов (хотя с точки зрения математики модель представляет несомненный интерес).
- для двухфронтной (одноступенчатой) модели – приводят к характеристическому уравнению (с характеристическим определителем девятого порядка), анализ корней которого позволяет оценивать параметры внутренней структуры детонации подавляющего большинства детонационноспособных газовых смесей и может служить основой разрабатываемой ИСППР по вопросам взрывобезопасности. При этом с достаточной точностью решаются проблемы инициирования и пределов детонации [16,28-30].

Направление дальнейших исследований связано с разработкой ИСППР по проблемам детонации газовых смесей и гетерогенных сред на базе исследования устойчивости в рамках двухфронтной модели стационарной детонационной волны. Возможно, моделирование стационарной детонационной волны с учетом непрерывного распределения параметров за ведущим ударным фронтом позволит расширить область применения подобной ИСППР на проблемы детонации конденсированных взрывчатых веществ.

#### Библиографические ссылки

1. **Асланов С.К.** Исследование устойчивости детонационного фронта в газовой смеси // Прикладная механика, 1966. – Т.2, вып. 7. – С. 138-141.
2. **Асланов С.К.** Исследование устойчивости детонационного фронта в газовой смеси в модели Чепмена-Жуге // ДАН СССР, 1966. – Т.169, №1. – С. 136-138.
3. **Асланов С.К.** Исследование газодинамической устойчивости детонационной волны в газовой смеси // Прикладная механика, 1967. – Т. 3, вып. 3. – С. 107-115.
4. **Асланов С.К.,** Будзировский В.Н., Щелкин К.И. Исследование газодинамической устойчивости детонационной волны произвольного профиля // ДАН СССР, 1968. – Т.182, №1. – С. 53-55.
5. **Асланов С.К.,** Будзировский В.Н., Щелкин К.И. Критерии неустойчивости детонационных волн // ДАН СССР, 1968. – Т.182, №2. – С. 285-287.
6. **Aslanov S.K.,** Volkov V.E. Instability and Structure of Detonation in a Model Combustor // Application of Detonation to Propulsion. – Moscow: TORUS PRESS, 2004.– P.17-25.
7. **Асланов С.К.,** Голинский О.С. К расчету внутренней структуры детонационной волны // ДАН СССР, 1981. – Т.260, №5. – С. 1154-1157.
8. **Малорян В.Л.** Метод расчета элементов пульсационной структуры газовой детонации // Материалы науч. конф. молодых ученых ОГУ. – Одесса, 1984. – С. 89–96.

9. **Асланов С.К.**, Волков В.Э., Царенко А.П. Математический анализ структуры детонационных волн в различных средах // *Вісник Одеськ. держ. ун-ту, сер.: фіз.-мат. науки*, 1999. – Т.4, вип. 4. – С. 134-140.
10. **Денисов Ю.Н.**, Трошин Я.К. Пульсирующая и спиновая детонация газовых смесей в трубах // *Докл. АН СССР*, 1959. – Т.125, №1. С. 110-113.
11. **Щелкин К.И.**, Трошин Я.К. Газодинамика горения. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 256 с.
12. **Войцеховский Б.В.**, Митрофанов В.В., Топчян М.Е. Структура фронта детонации в газах. – Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1963. – 168 с.
13. **Нетлетон М.** Детонация в газах. – М: Мир, 1989. – 280 с.
14. **Volkov V.E.** Decision Support Systems on Hazards of Industrial Explosions // *Seventh International Symposium on Hazards, Prevention and Mitigation of Industrial Explosions: Thirteenth International Colloquium on Dust Explosions & Eighth Colloquium on Gas, Vapor, Liquid, and Hybrid Explosions. St. Petersburg, Russia. July 7-11, 2008.* – St. Petersburg, 2008. – Vol.3. – P. 343-347.
15. **Зельдович Я.Б.**, Компанец А.С. Теория детонации. – М.: Гостехиздат, 1955. – 268 с.
16. **Aslanov S.K.**, Volkov V.E. Instability and Detonation Limits // *Nonequilibrium Processes.* – Moscow: TORUS PRESS, 2005. – Vol.1: Combustion and Detonation. – P. 365-373.
17. **Дремин А.Н.**, Савров С.Д., Трофимов В.С., Шведов К.К. Детонационные волны в конденсированных средах – М.: Наука, 1970. – 163 с.
18. **Асланов С.К.**, Волков В.Э. Устойчивость детонации конденсированных взрывчатых веществ // *Химическая физика процессов горения и взрыва. Детонация. Материалы IX Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву.* – Черногоровка: 1989. – С. 3-6.
19. **Асланов С.К.**, Волков В.Э. Устойчивость и структура детонации в твердых, жидких и газовых системах // *V Всесоюзное совещание по детонации. Сборник докладов в 2-х томах. Т.2.* Красноярск, 1991.– С. 335-339.
20. **Ландау Л.Д.** К теории медленного горения // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 1944. – Т.14, №6. – С. 240-244.
21. **Ландау Л.Д.**, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т.: Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с.
22. **Волков В.Э.**, Рыбина О.Б. Об устойчивости плоской стационарной волны медленного горения в сжимаемой среде // *Дисперсные системы: Тез. докл. XXI-ой научной конференции стран СНГ.* – Одесса. – 2004. – С. 94-95.
23. **Асланов С.К.**, Волков В.Э. Влияние магнитного поля и сжимаемости среды на устойчивость процесса горения // *Тезисы докладов XII-го Всесоюзного научно-практического семинара по электрофизике горения.* – Караганда: 1989. – С. 48.
24. **Семенов Н.Н.** К теории процессов горения // *Журнал русского физико-химического общества*, 1926. – Часть физ., т.60, №3. – С. 241–250.
25. **Семенов Н.Н.** Цепные реакции. – М.: Наука, 1986. – 535 с.
26. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 576 с.
27. **Бронштейн И.Н.**, Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. – М: Наука. – Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 832 с.
28. **Волков В.Э.** Пределы детонации и проблемы взрывобезопасности // *Тез. докл. международной научно-практической конференции «Пищевые технологии-2005».* – Одесса. – 2005. – С. 147.
29. **Волков В.Э.** Пределы детонации и проблемы взрывобезопасности // *Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій.* – Одеса, 2006. – Вип. 28 – С. 194-199.



30. **Асланов С.К.**, Волков В.Э. Неустойчивость и инициирование детонации // Тез. докл. XIII-го Симпозиума по горению и взрыву. – Черноголовка, Российская академия наук. – 2005. – С. 129.

*Надійшла до редколегії 05.12.2017.*

**І.С. Тонкошкур***Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара***МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛІВКОВИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ  
ПО ПОВЕРХНІ ТІЛА ОБЕРТАННЯ**

Розглянута задача про просторову безхвильову плівкову течію нелінійної в'язкопластичної рідини по поверхні твердого тіла під дією сили тяжіння. За допомогою метода малого параметра одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки по поверхні тіла обертання.

**Ключові слова:** рідка плівка, метод малого параметра, тіло обертання, в'язкопластична рідина.

Рассмотрена задача о пространственном безволновом пленочном течении нелинейной вязкопластической жидкости по поверхности твердого тела под действием силы тяжести. С помощью метода малого параметра получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности тела вращения.

**Ключевые слова:** жидкая пленка, метод малого параметра, тело вращения, вязкопластичная жидкость.

The problem of the spatial nonwave stationary flow of the viscoplastic fluid on the surface of the body of rotation under the action of gravity is considered. It is assumed that the axis of the body is located at a certain angle to the vertical, and the film of liquid flows down from its top. A curvilinear orthogonal coordinate system  $(\xi, \eta, \zeta)$  associated with the body surface is introduced:  $\xi$  is the coordinate along the generatrix of the body,  $\eta$  is the polar angle in the plane perpendicular to the axis of the body of revolution,  $\zeta$  is the distance along the normal to the surface. To describe the flow of a liquid film, a viscous incompressible fluid model is used, which is based on partial differential equations - the equations of motion and continuity. The following boundary conditions are used: sticking conditions on the solid surface; on the surface separating liquid and gas, the conditions for continuity of stresses and normal component of the velocity vector. For the closure of a system of differential equations, the Schulman rheological model is used, which is a generalization of the Ostwald-de-Ville power model and the Shvedov-Bingham viscoplastic model. To simplify the system of differential equations, the small parameter method is used. The small parameter is the relative film thickness. It is assumed that the generalized Reynolds number has an order equal to one. The solution of the equations of continuity and motion (taking into account the principal terms of the expansion) was obtained in an analytical form. The obtained formulas for the components of the velocity and pressure vector generalize the known relations for flat surfaces. To determine the unknown film thickness, an initial-boundary value problem was formulated for a first-order partial differential equation. The solution to this problem is found with the help of the finite difference method. The results of calculations according to the proposed method for the circular cone located at a certain angle to the vertical are presented. Calculations show that the parameters of nonlinearity and plasticity of this rheological model of a liquid can significantly affect the speed profiles and the distribution of the thickness of the viscous layer on the surface of the body.

**Keywords:** liquid film, small parameter method, body of rotation, visco-plastic fluid.

**Вступ.** Плівкові течії рідини широко застосовуються в енергетиці, металургії, в хімічній, будівельній, харчовій та інших галузях промисловості. В технічних пристроях реалізуються, як правило, тривимірні течії рідкої плівки по криволінійним поверхням. Крім того, в технологічних процесах часто використовують реологічно складні (неньютонівські) рідини, які мають особливі властивості. У зв'язку з цим становить інтерес розробка методів розрахунку просторових течій неньютонівських рідин.

Просторові течії в'язкої рідини по твердій поверхні досліджувались в роботах [1-4]. В [1] сформульована система рівнянь динаміки ньютонівської рідини на криволінійній твердій поверхні, дається розв'язок осесиметричних задач для кругового конуса і циліндра. В роботах [3,4] досліджувались течії ньютонівської та нелінійно-в'язкої рідин поблизу твердого тіла (циліндр, диск), що обертається навколо своєї осі. В [2] запропонована методика наближеного розрахунку несиметричних просторових течій по поверхні тіла обертання для моделі в'язкопластичної рідини Шведова-Бінгама. В даній роботі ця методика поширюється на реологічну модель Шульмана [5], яка є узагальненням нелінійно-в'язкої моделі і моделі Шведова-Бінгама.

**Постановка задачі.** Розглядається задача про просторову безхвильову стаціонарну течію в'язкопластичної рідини по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Припускається, що вісь тіла розташована під деяким кутом до вертикалі, а плівка рідини стікає від його вершини вниз. Введемо криволінійну ортогональну систему координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , зв'язану з поверхнею тіла: координата  $\xi$  відраховується від вершини тіла уздовж твірної,  $\eta$  – полярний кут в площині, перпендикулярній осі тіла обертання,  $\zeta$  – відстань по нормалі до поверхні. Рівняння поверхні тіла задається у вигляді,  $r = r_w(\xi)$  де  $r_w$  – відстань від точки поверхні до осі тіла.

Для опису течії рідкої плівки застосовується модель в'язкої нестисливої рідини, яка заснована на рівняннях імпульсу і нерозривності. У векторній формі ці рівняння мають вигляд

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = - \text{grad } p + \text{Div } \bar{\tau} + \rho \bar{g}, \quad (1)$$

$$\text{div } \bar{V} = 0, \quad (2)$$

де  $\bar{V}$  – вектор швидкості руху рідини,  $p$  – тиск,  $\rho$  – густина рідини,  $\bar{\tau}$  – тензор в'язких напружень,  $\bar{g}$  – інтенсивність сили тяжіння.

В якості крайових умов використовуються умова прилипання на поверхні твердого тіла, а також умови неперервності напружень і нормальної складової вектора швидкості – на поверхні, що розділяє рідину і газ.

$$\bar{V} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (3)$$

$$\bar{\tau} \bar{N} - (p - p_0) \bar{N} = 2\sigma \chi \bar{N} + \nabla_{\Gamma} \sigma, \quad (4)$$

$$\overline{V N} = 0 \quad \text{при } \zeta = F. \quad (5)$$

Тут  $F = F(\xi, \zeta)$  – рівняння вільної поверхні,  $p_0$  – атмосферний тиск в газі,  $\overline{N} = \overline{N}(\xi, \eta)$  – одинична нормаль до  $\Gamma$ ,  $\chi$  – середня кривизна поверхні  $\Gamma$ ,  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу,  $\nabla_{\Gamma}\sigma$  – поверхневий градієнт коефіцієнта  $\sigma$ .

Для замикання системи рівнянь (1)-(2) використовується реологічний закон Шульмана [5]:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2 \left[ \frac{\tau_0^{1/n}}{A} + \mu_p \right]^n A^{n-1} \dot{e}_{ij} && \text{при } |\tau| > \tau_0, \\ \dot{e}_{ij} &= 0 && \text{при } |\tau| \leq \tau_0, \end{aligned}$$

де  $\tau_{ij}$  – компоненти тензора в'язких напружень  $\tau$ ,  $\tau_0$  – граничне напруження зсуву,  $\mu_p$  – коефіцієнт пластичної в'язкості,  $A = \sqrt{2I_2}$ ,  $I_2$  – другий інваріант тензора швидкостей деформацій  $\dot{e}_{ij}$ ,  $n$  – параметр нелінійності.

**Метод розв'язання.** Для спрощення системи диференціальних рівнянь (1)-(2) з крайовими умовами (3)-(5) застосовується метод малого параметра, в якості якого обрана відносна товщина плівки  $\varepsilon = h_0 / l_0$  ( $h_0, l_0$  – характерні поперечний і поздовжній розміри). Припускається, що узагальнене число Рейнольдса  $Re = \rho h_0^n U_0^{2-n} / \mu^n$  має порядок одиниці (тобто  $\varepsilon Re \ll 1$ ).

Введемо безрозмірні змінні за формулами:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' \eta_0, \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \varepsilon l_0 \zeta', \\ u &= U_0 u', \quad w = U_0 w', \quad v = \varepsilon U_0 v', \\ p &= \rho U_0^2 p', \quad \sigma = \sigma_0 \sigma', \quad F = \varepsilon l_0 F'. \end{aligned}$$

Тут  $u, w, v$  – складові вектора швидкості, відповідні координатам  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $U_0, \sigma_0$  – характерні значення швидкості руху і коефіцієнта поверхневого натягу. Введемо також допоміжну функцію  $P(\xi, \eta, \zeta)$ , зв'язану з тиском  $p$  співвідношенням:

$$p = p_0 - 2\sigma\chi + \rho U_0^2 P$$

Подамо невідомі функції (складові вектора швидкості і тиск) у вигляді розкладів в ряд по  $\varepsilon$

$$A = A^0 + \varepsilon A^1.$$

Враховуючи головні члени розкладань, отримаємо спрощену систему рівнянь (надалі для скорочення запису знак «'» опущений)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{r_w} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{r'_w}{r_w} u = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{(\overline{en})}{Fr},$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial \zeta} = -\frac{\text{Re}}{Fr}(\overline{ee_1}), \quad \frac{\partial \tau_{32}}{\partial \zeta} = -\frac{\text{Re}}{Fr}(\overline{ee_2}).$$

Крайові умови:

$$u = w = v = 0 \quad \text{при } \zeta=0,$$

$$\tau_{31} = \tau_{32} = P = 0, \quad v - u \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{w}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \zeta=F.$$

Тут  $u, w, v$  – складові вектора швидкості;  $Fr = U_0^2 / (gh_0)$  – число Фруда;  $\bar{e}$  – одиничний вектор, що задає напрям дії сили тяжіння;  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$  – базисні вектори криволінійної системи координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ ;  $g$  – прискорення вільного падіння. Поверхня  $\zeta = F_1(\xi, \eta)$ , що розділяє в'язку і пластичну області течії рідини, визначається параметром пластичності  $S = \tau_0 h_0^n / (\mu^n U_0^n)$ .

Розв'язок задачі (в нульовому наближенні) для складових вектора швидкості має вигляд:

у в'язкій області течії (при  $\zeta < F_1$ )

$$u = \varphi_1 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left[ (F - \zeta)^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right] + \bar{S}^\alpha \zeta \right\},$$

$$w = \varphi_2 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left[ (F - \zeta)^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right] + \bar{S}^\alpha \zeta \right\},$$

$$v = \left( \varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot B \cdot F^{\alpha+1} \left[ \frac{\zeta}{F} + \beta \left[ \left( 1 - \frac{\zeta}{F} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \right] +$$

$$+ \beta \varphi_3 F^{\alpha+2} \left[ \frac{\zeta}{F} + \left[ \left( 1 - \frac{\zeta}{F} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \gamma \right] + \varphi_6 \bar{S}^\alpha \frac{\zeta^2}{2},$$

у пластичній області (при  $\zeta \geq F_1$ )

$$u = \varphi_1 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left( \bar{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) + \bar{S}^\alpha (F - \bar{S}) \right\},$$

$$w = \varphi_2 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left( \bar{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) + \bar{S}^\alpha (F - \bar{S}) \right\},$$

$$v = \left( \varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot B \cdot \left[ F^\alpha (F - \bar{S}) + \left( \bar{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) \beta \right] +$$

$$+ \beta \varphi_3 \left[ F^{\alpha+1} (F - \bar{S}) + \left( \bar{S}^{\alpha+2} - F^{\alpha+2} \right) \gamma \right] + \varphi_6 \bar{S}^\alpha \frac{(F - \bar{S})^2}{2},$$

для функції тиску

$$P = \varphi_4 (\zeta - F),$$

де  $F_1 = F - \bar{S}$  – товщина в'язкого шару,  $\bar{S} = S / (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^\alpha$ ,  $\varphi_i, B$  – відомі функції, які залежать від геометричних і фізичних параметрів:

$$\varphi_1 = -\frac{Re}{Fr}(\bar{e}, \bar{e}_1), \varphi_2 = -\frac{Re}{Fr}(\bar{e}, \bar{e}_2), \varphi_3 = \frac{\partial(\varphi_1 B)}{\partial \xi} + \frac{1}{r_w} \frac{\partial(\varphi_2 B)}{\partial \eta} + \frac{r'_w}{r_w} \varphi_1 B, \varphi_4 = \frac{(\bar{e}, \bar{n})}{Fr},$$

$$\varphi_5 = D \left( \varphi_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \varphi_1 \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \right) + \frac{D}{r_w} \left( \varphi_1 \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \varphi_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \right), \varphi_6 = -\varphi_3 + \alpha B \varphi_5,$$

$$B = D^{-(\alpha-1)/2}, \quad D = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{-1}, \quad \alpha = \frac{1}{n}, \quad \beta = \frac{n}{n+1}, \quad \gamma = \frac{n}{2n+1},$$

Невідома товщина плівки  $F$  визначається в результаті розв'язання крайової задачі

$$\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} + f(\xi, \eta, F) = 0, \tag{6}$$

$$F(1, \eta) = 1, \quad F(\xi, 0) = F_0(\xi), \tag{7}$$

де

$$f(\xi, \eta, F) = \frac{\beta \varphi_3 \left[ F^{\alpha+1} (F - \bar{S}) + (\bar{S}^{\alpha+2} - F^{\alpha+2}) \beta \right] + 0.5 \varphi_6 \bar{S}^\alpha (F - \bar{S})^2}{B (F^\alpha - \bar{S}^\alpha) (F - \bar{S})}.$$

Система рівнянь (6)-(7) розв'язується чисельно з використанням різницевої схеми біжучого обчислення. Функція  $F_0(\xi)$  знаходиться в результаті розв'язання задачі на лінії розтікання  $\eta=0$ . Результати розрахунків за описаною методикою для конуса з кутом  $\theta=30^\circ$  при куті скошу потоку  $\delta=10^\circ$  і значеннях фізичних параметрів  $Re=1, Fr=1$  представлені на рисунках 1-2. На рис. 1 показані профілі поздовжньої складової вектора швидкості  $u$  в шарі плівки для точки поверхні з координатами  $(\xi=1,5; \eta=0^\circ)$  при значеннях параметрів  $n=1, S=0; 0,1; 0,2; 0,3$  (рис. 1.а) і при  $S=0, n=0,5; 1; 2; 10$  (рис. 1.б). На рис. 2 наведені розподіли товщини плівки  $F$  і товщини в'язкого шару  $F_1$  вздовж лінії розтікання ( $\eta=0^\circ$ ). Розрахунки показують, що параметри нелінійності  $n$  і пластичності  $S$  істотно впливають на профілі швидкості і розподіли товщини в'язкого шару по поверхні тіла.

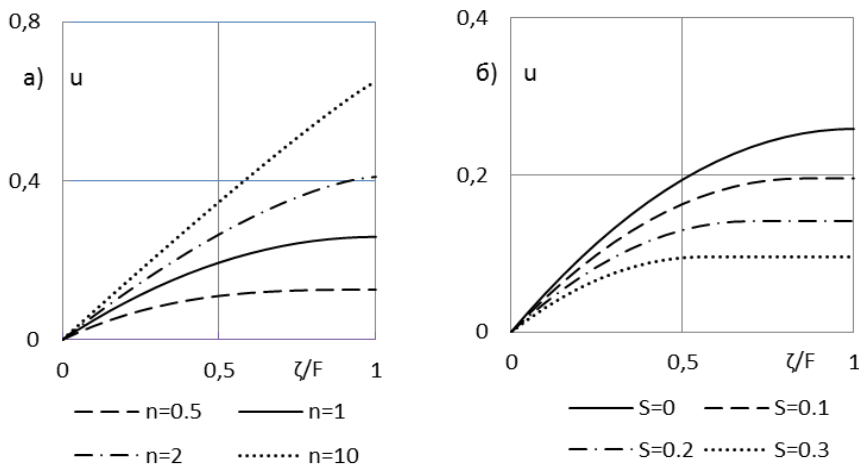
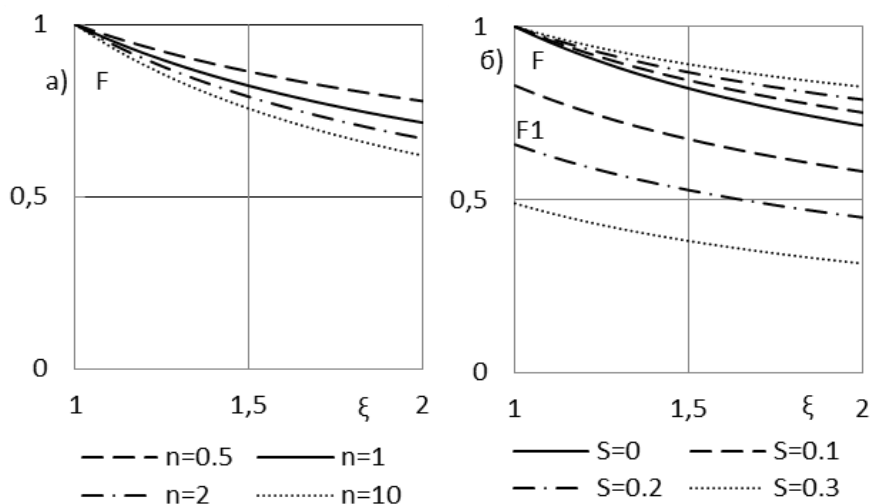


Рис. 1 Профілі поздовжньої складової вектора швидкості  $u$



**Рис. 2. Розподіли товщини плівки  $F$  і товщини в'язкого шару  $F_1$  вздовж твірної конуса ( $\eta=0^\circ$ )**

**Висновки.** За допомогою методу малого параметра розроблена методика розв'язання задачі про течію нелінійної в'язкопластичної рідини по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Сформульовано крайову задачу для визначення товщини плівки. Отримано аналітичні вирази для профілів швидкості в залежності від фізичних параметрів задачі.

#### Бібліографічні посилання

1. **Волченко Ю.А.** Динамика жидкой пленки на искривленной твердой стенке с учетом фазового превращения на свободной поверхности [Текст] / Ю.А. Волченко, И.И. Иевлев // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. –1994. – №4. – С. 42-50.
2. **Дудник, А.С.** Моделирование течения вязкопластической жидкости по поверхности тела вращения [Текст]/ А.С. Дудник, И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – С. 98-104.
3. **Конон, П.Н.** Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, А.И. Ермоленко // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, – 2017. – Вып. 32. – С. 46 – 51.
4. **Рябчук, Г.В.** Течение нелинейно-вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска [Текст] / Г.В. Рябчук, А.Г. Щукина // Изв. РАН. Механика жидкости и газа – 2003. – № 6. – С. 155-161.
5. **Шульман, З.П.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях [Текст] / З.П. Шульман, В.Н. Байков.– Минск: Наука и техника, 1979.– 296 с.

Надійшла до редколегії 11.10.2018.

**І.С. Тонкошкур, Т.Є. Зайцева**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ ПО ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ**

**Розглянута задача про сумісну течію двох взаємно нерозчинних рідких плівок і газу по циліндричній поверхні під дією сили тяжіння. За допомогою метода малого параметра одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки вздовж поверхні циліндра. Отримано нелінійне рівняння для визначення оптимального значення параметра впливу газового потоку.**

**Ключові слова:** двошарова рідка плівка, газовий потік, метод малого параметра, циліндрична поверхня.

**Рассмотрена задача о совместном течении двух взаимно нерастворимых жидких пленок и газа по цилиндрической поверхности под действием силы тяжести. С помощью метода малых возмущений получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности цилиндра. Получено нелинейное уравнение для определения оптимального значения параметра влияния газового потока.**

**Ключевые слова:** двухслойная жидкая пленка, газовый поток, метод малого параметра, цилиндрическая поверхность.

**The problem of a stationary joint flow of a two-layer liquid film and gas along the outer (or inner) surface of a circular cylinder of radius  $r_0$  is considered. It is assumed that the films are insoluble in one another, and there are no chemical reactions. The axis of the body is located vertically, and the films flow down from its top. The film is affected by gravity, as well as a gas stream directed upwards or downwards. A cylindrical coordinate system  $(r, \theta, z)$  is introduced: the  $z$  coordinate is measured along the axis of the cylinder,  $r$  and  $\theta$  are the polar coordinates in a plane perpendicular to the axis of the body.**

**To describe the flow of a liquid film, a viscous incompressible fluid model is used, which is based on the equations of continuity and Navier-Stokes. The following boundary conditions are set on the interface surfaces: on the solid surface - draw off "sticking", on the "liquid-liquid" and "liquid-gas" interfacial surfaces - the conditions of equilibrium of forces and continuity of speeds.**

**To simplify these differential equations, the method of a small parameter, for which the relative thickness of the films is selected, is applied. Solutions of simplified equations (in a zero approximation) are obtained in analytical form. Functional dependences are obtained for calculating the optimal effect of the gas flow on the "working" film.**

**In accordance with the described method, calculations of the flow of a two-layer film on the outer and inner surfaces of the circular cylinder are performed in cases where the gas stream is directed upwards, downwards, and also when the gas flow is absent.**

**An increase in the relative thicknesses of the films  $\delta_1$  and  $\delta_2$  (with decreasing radius of the cylinder  $r_0$ ) leads to an increase in deviations from the case of a plane surface that corresponds to the limiting case  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . The results of calculations of the flow of a two-layer liquid film on the surface of a circular cylinder are presented. The analysis of the influence of physical parameters on the speed profiles is carried out. The results of**



calculations for determining the optimal effect of gas flow on a liquid film are presented, when the profile of the speed of the "working" film is the most uniform.

**Keywords:** two-layer liquid film, gas flow, small parameter method, cylindrical surface.

**Вступ.** Течії в'язкої рідини з вільними межами застосовуються в різних технологічних процесах і апаратах, зокрема в плівкових хімічних реакторах. Важливою задачею при проектуванні таких апаратів є організація течії рідкої плівки таким чином, щоб розподіл швидкості в поперечному перерізі був близьким до рівномірного. Одним зі способів реалізації такої течії є використання допоміжної плівки, яка б рухалась по твердій стінці і прискорювала б «робочу» плівку.

Дослідження течій двошарових плівок проводились в роботах [1-6]. Спільні течії рідини і газу навколо плоских поверхонь розглядалися в роботах [1-3,5,6]. В [1-3] дія газового потоку враховувалося наближено (за допомогою задання дотичного напруження на поверхні розділу «рідина - газ»). В [5,6] – запропонована методика наближеного розрахунку трифазної течії двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі, що основана на методі збурень.

В плівкових апаратах часто реалізуються течії рідини по зовнішнім або внутрішнім поверхням вузьких труб. У цих випадках необхідно враховувати кривизну поверхні. В [4] досліджувались течії двох рідких плівок на зовнішній поверхні циліндра, що обертається в нерухомому газі. В даній роботі розглянута задача про течію двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні з урахуванням впливу газового потоку.

**Постановка задачі.** Розглядається задача про стаціонарну сумісну течію двошарової рідкої плівки і газу по зовнішній (або внутрішній) поверхні кругового циліндра радіуса  $r_0$ . Припускається, що плівки є нерозчинними одна в другій, а хімічні реакції відсутні. Вісь тіла розташована вертикально. На плівки діє сила тяжіння, а також газовий потік, направлений вгору або вниз.

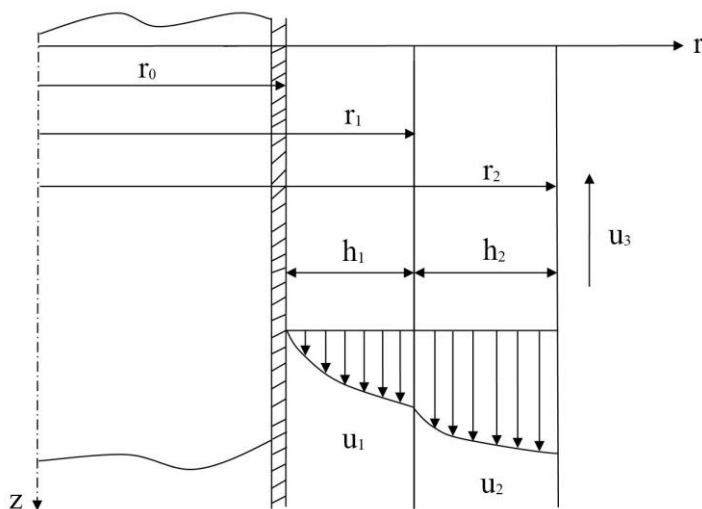


Рис.1. Схема течії

Для опису течії рідких плівок використовується система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса і нерозривності. В циліндричній системі координат  $(r, \theta, z)$  ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + g, \\ u_i \frac{\partial v_i}{\partial z} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_i)}{\partial r} + \frac{\partial u_i}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Тут  $u, v$  – компоненти вектора швидкості в напрямку осей координат  $z$  та  $r$ ,  $p$  – тиск,  $\rho$  – густина рідини,  $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $i = 1, 2$  (індекси 1, 2, відповідають номеру рідкої плівки, G – газу).

На поверхнях розділу ставляться наступні крайові умови:

1) на поверхні твердого тіла (при  $r = r_0$ ) – умови «прилипання»

$$u_1 = v_1 = 0, \quad (1)$$

2) на межфазній поверхності «рідина - рідина» (при  $r = r_1$ ) – умови рівноваги сил і неперервності швидкостей

$$p_{n1} = p_{\sigma 1} + p_{n2}, \quad p_{\tau 1} = p_{\tau 2}, \quad u_{n1} = u_{n2}, \quad u_{\tau 1} = u_{\tau 2}, \quad (2)$$

3) на міжфазній поверхні «рідина - газ» (при  $r = r_2$ )

$$p_{n2} = p_{\sigma 2} + p_{nG}, \quad p_{\tau 2} = p_{\tau G}, \quad u_{n2} = u_{nG}, \quad u_{\tau 2} = u_{\tau G}, \quad (3)$$

Тут  $p_n$  і  $p_\tau$  – нормальна і дотична компоненти тензора напружень на міжфазній поверхні,  $p_\sigma$  – капілярний тиск. Параметри газового потоку на межі «рідина - газ» вважаються заданими.

**Метод розв'язання.** Для спрощення вихідної системи диференціальних рівнянь застосовується метод малого параметра, за який вибрана відносна товщини плівки:  $\varepsilon = \bar{h}/l$ , де  $\bar{h}, l$  – характерні поперечний і поздовжній розміри. Введемо також характерну поздовжню швидкість  $\bar{u}$  в рідких плівках. У наведеній вище системі диференціальних рівнянь перейдемо до безрозмірних змінних за такими формулами:

$$Z = \frac{z}{l}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{\bar{u}}, \quad V_i = \frac{v_i}{\varepsilon \bar{u}}, \quad P_i = \frac{p_i}{\rho \bar{u}^2}, \quad \delta_i = \frac{h_i}{r_0}.$$

Введемо безрозмірні критерії:  $Fr = \bar{u}^2 / (g\bar{h})$  – число Фруда,  $Re_1 = \bar{u}\bar{h} / \nu_1$ ,  $Re_2 = \bar{u}\bar{h} / \nu_2$  – числа Рейнольдса для кожної з плівок. Будемо припускати, що виконуються наступні умови:  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\varepsilon Re_1 \ll 1$ ,  $\varepsilon Re_2 \ll 1$ . У безрозмірному вигляді спрощена система рівнянь для знаходження поздовжніх швидкостей рідких плівок запишеться так

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U_1}{\partial R} \right) = -\frac{Re_1}{Fr} R, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U_2}{\partial R} \right) = -\frac{Re_2}{Fr} R, \quad (5)$$

Крайові умови:

$$U_1 = 0 \quad \text{при } R=1, \quad (6)$$

$$U_1 = U_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{Re_1}{Re_2} \frac{\partial U_2}{\partial Y} \quad \text{при } R=1+\delta_1=R_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = Ge\delta_2 \frac{Re_2}{Fr} \quad \text{при } R=1+\delta_1+\delta_2=R_2. \quad (8)$$

Розв'язок цієї крайової задачі має вигляд

$$U_1 = \frac{Re_1}{2Fr} \left( \frac{1-R^2}{2} + \left( R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right) \ln R \right),$$

$$U_2 = \frac{Re_2}{2Fr} \left( \frac{R_1^2 - R^2}{2} + R_*^2 \ln \frac{R}{R_1} \right) + \frac{Re_1}{2Fr} \left( \frac{1-R_1^2}{2} + \left( R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right) \ln R_1 \right),$$

де  $R_*^2 = R_2^2 + 2Ge\delta_2 R_2$ ,  $Ge = \tau_3 / (\rho_2 g h_2)$  - параметр впливу газового потоку,  $\tau_3$  - напруження тертя на міжфазній поверхні «рідина - газ».

Оптимальним режимом течії другої (робочої) плівки називають таку течію, для якої відношення максимальної швидкості  $U_2^{\max}$  до середньої швидкості  $U_2^{cp}$  буде мінімальним [1]. У цьому випадку розподіл швидкості в поперечному перерізі буде найбільш рівномірним. Оптимальне значення параметру впливу газового потоку  $Ge$  знаходиться з наступної умови:

$$\frac{d}{dGe} \left( \frac{U_2^{\max}}{U_2^{cp}} \right) = 0.$$

Для даної задачі оптимальне значення параметра  $Ge_{opt}$  визначається за формулою

$$Ge_{opt} = \frac{R_{*opt}^2 - R_2^2}{2R_2\delta_2},$$

де величина  $R_{*opt}^2$  знаходиться з нелінійного рівняння

$$A \ln(R_*^2) + BR_*^2 + C = 0,$$

коефіцієнти якого залежать від фізичних і геометричних параметрів.

**Аналіз одержаних результатів.** За описаною методикою проведено розрахунки течій двошарової плівки по зовнішній і внутрішній поверхнях кругового циліндра у випадках, коли газовий потік спрямований вгору ( $Ge < 0$ ), вниз ( $Ge > 0$ ), а також коли рух газу відсутній.

Результати розрахунків при значеннях фізичних параметрів  $Re_1 = Re_2 = 1$ ;  $Fr = 1$ ;  $\rho_2/\rho_1 = 0.5, 1$ ;  $Ge = -0.75 \div 0.25$  і різних відносних товщинах плівок  $\delta_1$ ,  $\delta_2 = 0.01 \div 0.5$  наведені на рис.2-3. На рис.2 показані профілі поздовжньої

швидкості в рідких плівках на зовнішній стороні кругового циліндра при різних значеннях  $Ge$  ( $\delta_1=\delta_2=0.2$ ,  $\rho_2/\rho_1=0.5$ ), на рис.3 – залежності оптимального значення параметру газового потоку  $Ge_{opt}$  від геометричних параметрів ( $\rho_2/\rho_1=1$ ). Від’ємні значення цих параметрів на осі абсцис відповідають внутрішній стороні циліндра, додатні – зовнішній. На рис.3а наведені результати для випадку, коли «робоча» і допоміжна плівки мають однакову товщину ( $\delta_1=\delta_2=\delta$ ), на рис 3б,в – коли товщина однієї з плівок не змінюється.

Як видно з рисунків, рух газу може призводити до значних змін картини течії. Оптимальний вибір параметру впливу газового потоку  $Ge$  дає можливість одержати найбільш рівномірний розподіл швидкості в рідкій плівці. Збільшення відносних товщин плівок  $\delta_1$  і  $\delta_2$  (при зменшенні радіуса циліндра  $r_0$ ) призводить до збільшення відхилень від випадку плоскої поверхні, яка відповідає граничному випадку  $\delta_1=\delta_2=0$  (рис.3а).

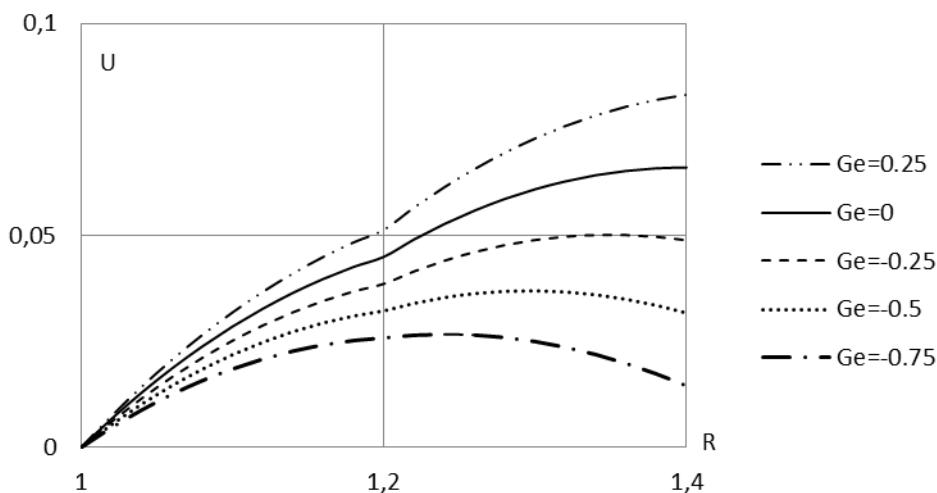
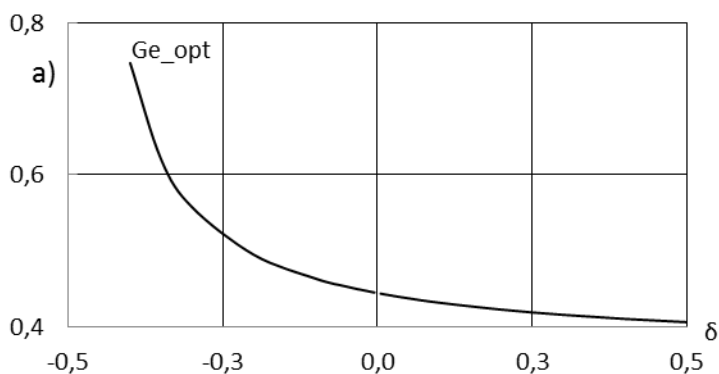


Рис. 2 Профілі швидкостей в рідких плівках



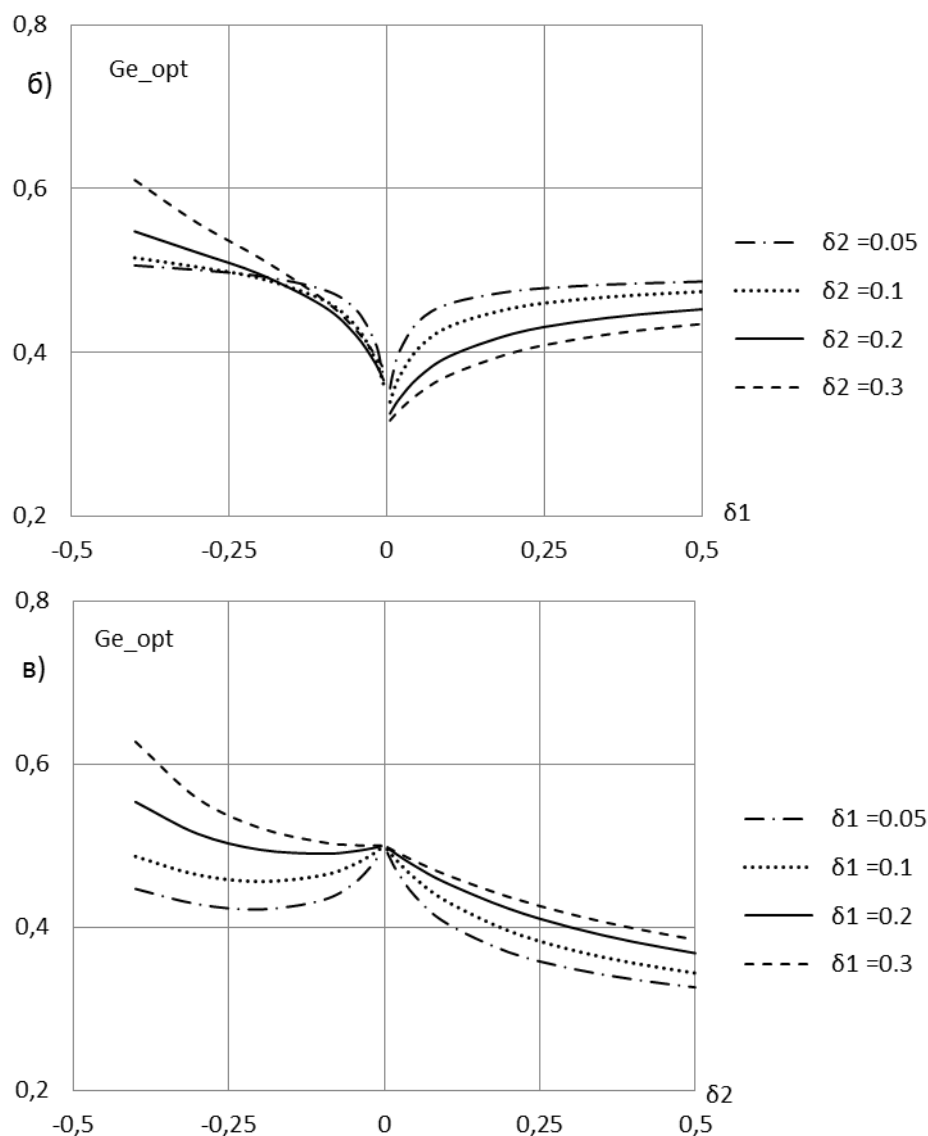


Рис. 3 Залежність параметру впливу газového потоку  $Ge_{opt}$  від геометричних параметрів

**Висновки.** За допомогою методу малого параметра отримано наближений розв'язок задачі про течію двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні з урахуванням впливу газového потоку. Отримано функціональні залежності для розрахунку оптимальної дії газového потоку на «робочу» плівку, коли її профіль швидкості стає найбільш рівномірним.

#### Бібліографічні посилання

1. **Захаров, М.К.** Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газového потока [Текст] / М.К. Захаров, А.Ю. Комков, Д.М. Павленко // Вестник МИТХТ. – 2008. – Т. 3, № 4. – С.70–74.
2. **Захаров, М.К.** Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок неньютоновских жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газového потока [Текст] / М.К. Захаров, А.Ю. Комков // Теоретические основы химической технологии. – 2009. – Т. 43, № 1. – С. 37–46.
3. **Захаров, М.К.,** Расчет толщины пленок двух взаимно нерастворимых жидкостей при

встречном газовом потоке [Текст] / М.К. Захаров, К.О. Гончарук // Вестник МИТХТ. – 2013. – Т. 8, № 4. – С. 33-37.

4. **Конон, П.Н.** Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, А.И. Ермоленко // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, – 2017. – Вып. 32. – С. 46 – 51.
5. **Санто, О.В.** Математичне моделювання течій двошарової рідкої плівки по поверхні твердого тіла [Текст] / О.В.Санто, І.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Ліра, 2014. – С. 200-206.
6. **Тонкошкур, І.С.** Математическое моделирование взаимодействия двухслойной жидкой пленки с газовым потоком [Текст] / И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Збірник наукових праць. – Д: Ліра, 2017. – Вип. 17. – С. 220-225.

*Надійшла до редколегії 16.10.2018.*

**В.Н. Турчин\*, О.А.Лоскутов\*\*, А.С.Дрожжин\*, Е.В. Волкова\***

*\*Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара,*

*\*\*Днепровская медицинская академия МОЗ Украины*

## **К ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА ИМПЛАНТАТА ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА**

**В работе предложен алгоритм выбора имплантата тазобедренного сустава по количественным характеристикам.**

**Ключевые слова:** алгоритм, выборка, регрессия, имплантат, тазобедренный сустав, количественные характеристики.

У роботі запропоновано алгоритм вибору імплантату кульшового суглоба за кількісними характеристиками. Ендопротезування найчастіше є єдиним виходом для пацієнта з важкою патологією кульшового суглоба. Важливим етапом, який багато в чому забезпечує вдале ендопротезування, є правильний вибір імплантату.

При встановленні імплантату кульшового суглоба, його однією своєю частиною – ніжкою садять в кістковомозковий канал стегнової кістки. Причому це необхідно зробити так, щоб з одного боку, ніжка щільно прилягала до стінок каналу, а з іншого, в каналі не повинно виникати критичних напружень. У супротивному разі можливі серйозні післяопераційні ускладнення. Належне прилягання імплантату до стінок каналу забезпечується правильним вибором імплантату із заданого стандартного набору імплантатів. На сьогоднішній день вибір імплантату реалізується за допомогою рентгенівських зображень каналу в прямій та бічній проекціях. На знімки кульшового суглоба та стегнової кістки в прямій та бічній проекціях послідовно накладають креслення імплантату, виконані на прозорій плівці, і таким чином обирають імплантат. У зв'язку з цим виникає задача побудови алгоритму вибору імплантату на основі кількісних характеристик.

Щільність прилягання імплантату до стінок каналу необхідно забезпечити як у прямій проекції так і у бічній. У прямій проекції щільність прилягання імплантату до стінок каналу можна описувати різними числовими характеристиками зокрема різницею площ осевого перерізу каналу та імплантату (див. [2]).

У бічній проекції канал викривлений. Тому оптимально вибраний для даного каналу імплантат у бічній проекції має торкатися стінок каналу принаймні у трьох точках, а якщо такий імплантат вибрати неможливо, то відстань від задньої стінки імплантату до передньої стінки каналу має бути мінімальною.

Оскільки щільність прилягання імплантату до стінок каналу необхідно забезпечити як у прямій проекції так і у бічній, то, взагалі кажучи, для даного каналу вибір імплантату з заданого набору імплантатів неоднозначний. У роботі запропоновано алгоритм вибору оптимального імплантату у бічній проекції.

**Ключові слова:** алгоритм, вибірка, регресія, імплантат, кульшовий суглоб, кількісні характеристики.

**Endoprosthetics is often the only way out for a patient with severe hip joint pathology. An important step, in many ways ensuring successful replacement, is the correct choice of implant.**

When installing the hip joint implant, one of its parts - the leg - is placed in the marrow canal of the femur. Moreover, the installation must be done in a way that ensures, that on one hand, the leg fits tightly against the walls of the channel and on the other hand, no critical stress appears in the channel. Otherwise, serious postoperative complications are possible. Proper fit of the prosthesis is ensured by the correct choice from a given standard set of implants. To date the choice of the implant is realized using x-ray images of the canal in the direct and lateral projections. The implant images on a transparent film are sequentially applied to the hip and thighbone images in a straight and lateral projection, and thus a suitable implant is selected. In this regard, the problem of constructing an algorithm for choosing an implant based on quantitative characteristics arises.

The method of optimal implant selection based on the quantitative characteristics of the implant and of the difference between the width of the channel in the direct projection and the width of the implant in a direct projection is a possible solution. The best for this channel in a direct projection is the implant for which the average distance between the upper wall of the canal and the implant is the smallest. The quantitative characteristic of the placement quality of the implant in the lateral projection is introduced in a similar way. The implants that fit in the channel are considered. It also must be taken into account that the implant should have contact with the channel in at least three points in the lateral projection. "The best for a given channel on the lateral projection is the implant for which the difference between the minimum distance from the anterior wall of the canal to the posterior wall of the implant and the width of the implant in this section is minimal.

In best case, the best implant is the one that fits best in both projections. However, this does not always happen. Finally, for a given channel the choice of an implant from a given set of implants, generally speaking, is ambiguous. In addition to the characteristics and quality of an implant placement proposed here, other methods are possible.

**Keywords:** algorithm, sampling, regression, implant, hip joint, quantitative characteristics.

**Введение.** Эндопротезирование чаще всего является единственным выходом для больного с тяжелой патологией тазобедренного сустава. При установке имплантата (см. рис. 1 и рис. 2) тазобедренного сустава его одной своей частью – ножкой, садят в костномозговой канал бедренной кости (см. рис. 3 и рис. 4). Причём это необходимо сделать так, чтобы, с одной стороны, ножка плотно прилегала к стенкам канала, а с другой, в канале не должно возникать критических напряжений. В противном случае возможны серьёзные послеоперационные осложнения. Надлежащее прилегание имплантата к стенкам канала обеспечивается подходящим выбором имплантата из заданного стандартного набора имплантатов. На сегодняшний день выбор имплантата реализуют по рентгеновским снимкам канала в прямой и боковой проекциях: на снимки тазобедренного сустава и бедренной кости в прямой и боковой проекциях последовательно накладывают чертежи имплантатов, выполненные на прозрачной пленке и таким образом выбирают подходящий имплантат.

В связи с этим возникает задача построения алгоритма выбора имплантата, основанного на количественных характеристиках.



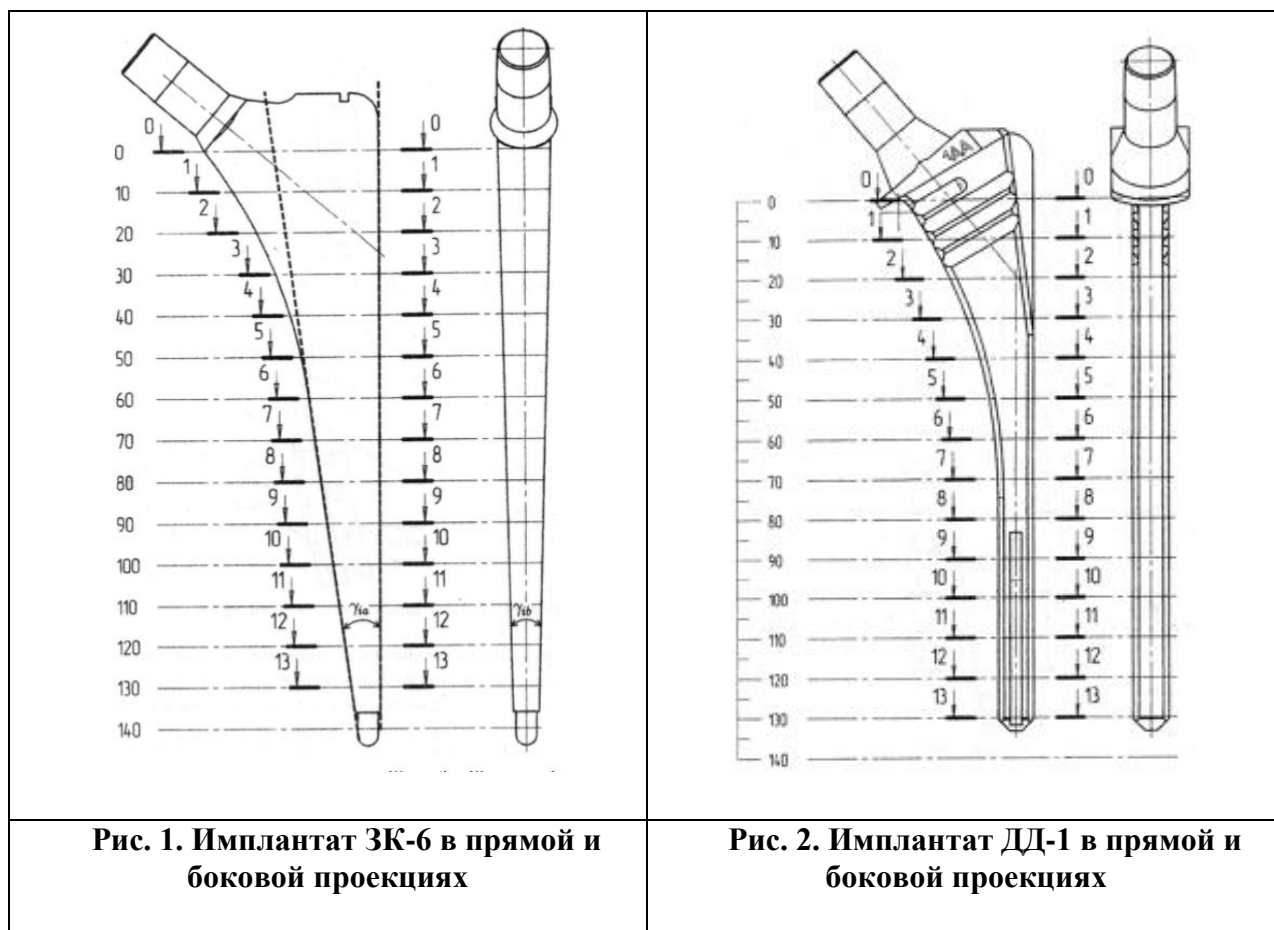


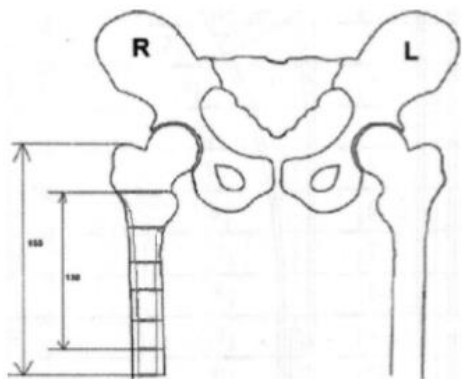
Рис. 1. Имплантат ЗК-6 в прямой и боковой проекциях

Рис. 2. Имплантат ДД-1 в прямой и боковой проекциях

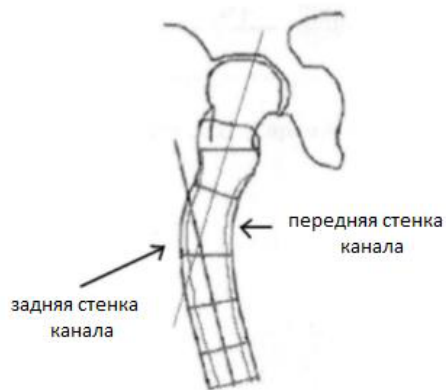
**Постановка задачи.** Целью работы является разработка методики выбора имплантата для данного костномозгового канала в боковой проекции. Выбор имплантата в прямой проекции описан в [2].

Для построения алгоритма выбора имплантата для данного канала по его количественным характеристикам сначала рентгеновские снимки бедренной кости оцифровывают: с шагом 11.5 мм в 13 точках (узлах) снимают значения  $a_j$  ширины канала в прямой проекции и значение ширины канала  $b_j$  в боковой проекции,  $j = 0, 1, 2, \dots, 12$ . В боковой проекции еще снимают значения параметров, описывающих искривление канала, а именно величину  $\alpha$  угла искривления канала и расстояние  $l_\alpha$  от начала канала (малого вертлюга) до вершины угла искривления (см. рис. 5).

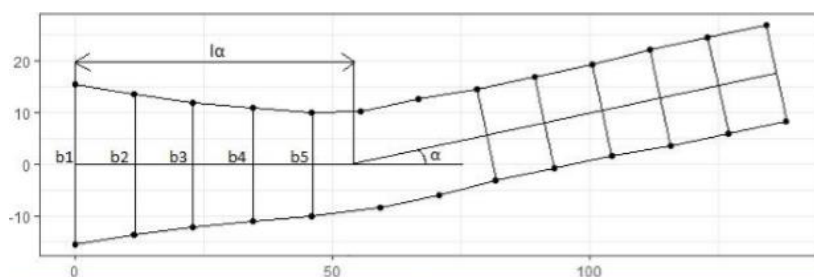
Заметим, что по степени искривления каналы в боковой проекции можно разделить на три типа: канал типа 2 – заметны явные искривления передней и задней стенки канала (см. рис. 6); канал типа 1 – заметны искривления передней стенки канала, искривления задней стенки канала незначительные (см. рис. 7), канал типа 0 – искривления как передней стенки канала, так и задней явно не просматриваются (см. рис. 8).



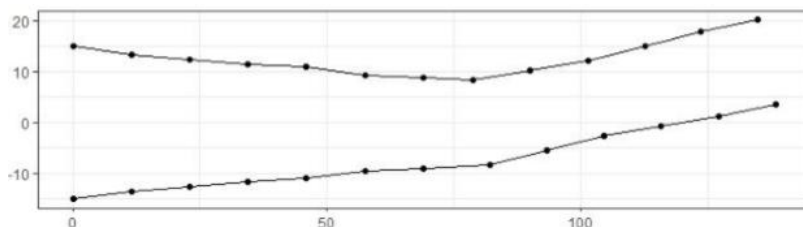
**Рис. 3. Тазобедренный сустав и костномозговой канал в прямой проекции**



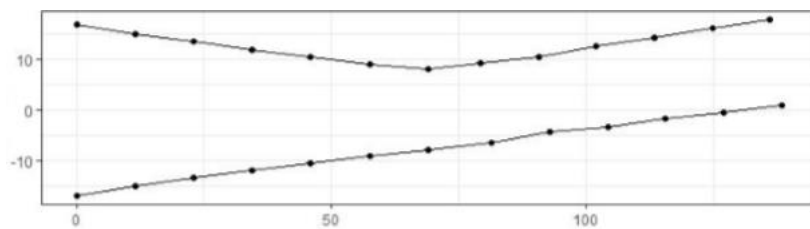
**Рис. 4. Тазобедренный сустав и костномозговой канал в боковой проекции**



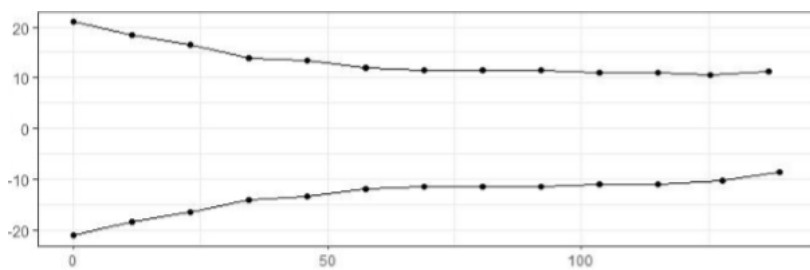
**Рис. 5. Проекция костномозгового канала в боковой проекции**



**Рис. 6. Боковая проекция канала типа 2**



**Рис. 7. Боковая проекция канала типа 1**



**Рис. 8. Боковая проекция канала типа 0**

**Построение боковой проекции канала по количественным характеристикам канала.** В декартовой системе координат  $Oxy$  нанесем точки  $(x_i, y_i)$ , где  $x_i = i \cdot 11.5$ ,  $y_i = b_i / 2$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$  ( $b_i$  – ширина канала в боковой проекции в точке  $x_i$ ). Соединим соседние точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$ , отрезками – получим ломаную. Отобразив ее относительно оси  $Ox$  – получим еще одну ломаную (см. рис. 9). Эти две ломаные можно было бы рассматривать в качестве моделей проекций передней и задней стенки канала соответственно в боковой проекции, если бы канал не имел искривлений.

**Построение боковой проекции канала по количественным характеристикам канала.** В декартовой системе координат  $Oxy$  нанесем точки  $(x_i, y_i)$ , где  $x_i = i \cdot 11.5$ ,  $y_i = b_i / 2$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$  ( $b_i$  – ширина канала в боковой проекции в точке  $x_i$ ). Соединим соседние точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 12$ , отрезками – получим ломаную. Отобразив ее относительно оси  $Ox$  – получим еще одну ломаную (см. рис. 9). Эти две ломаные можно было бы рассматривать в качестве моделей проекций передней и задней стенки канала соответственно в боковой проекции, если бы канал не имел искривлений.

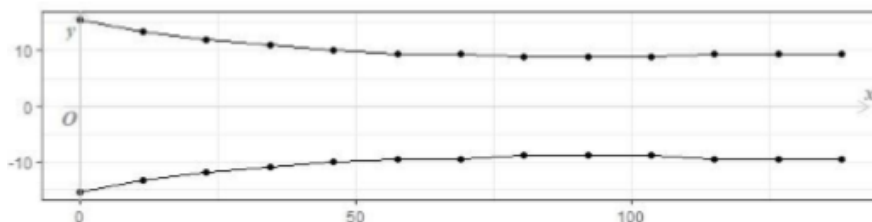


Рис. 9. Боковая проекция без искривления

Модель боковой проекции канала с искривлением на угол  $\alpha$  в точке  $(0, l_\alpha)$  получим поворотом на угол  $\alpha$  против часовой стрелки около точки  $(0, l_\alpha)$  части плоскости  $\{(x, y) : x \geq l_\alpha\}$ . Этот поворот реализуется преобразованием:

$$\begin{cases} x' = (x - l_\alpha) \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + l_\alpha \\ y' = (x - l_\alpha) \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

В результате получаем модель боковой проекции канала (см. рис. 6).

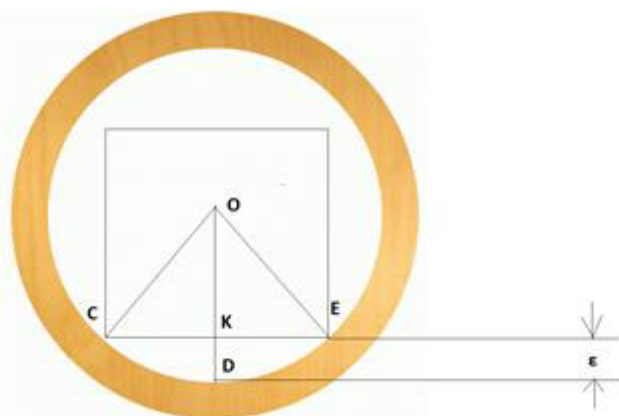
**О величине  $\epsilon$ .** При выборе имплантата как в боковой проекции, так и в прямой необходимо учитывать тот факт, что имплантат касается стенок канала не своими стенками, а рёбрами (см. рис. 10).

На рис. 10 изображена окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OC$ , которая представляет собой поперечное сечение канала в 13-м (последнем) узле.  $CE = a_{12}^{(i)}$  – ширина имплантата в прямой проекции в 13-м узле,

$OC = a_{12}^{(k)} / 2$ , где  $a_{12}^{(k)}$  – ширина канала в 13-м узле в прямой проекции. Для данного канала и данного имплантата имеем (см. рис. 10):

$$\varepsilon = \left( a_{12}^{(k)} - \sqrt{(a_{12}^{(k)})^2 - (a_{12}^{(i)})^2} \right) / 2$$

Вычислив для каждого из 133 каналов значение  $\varepsilon_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 133$ , получим выборку объемом 133 величины  $\varepsilon$ . По выборке получим оценки среднего и среднего квадратического отклонения величины  $\varepsilon$ , которые оказались равны 0.89 и 0.6 соответственно.



**Рис. 10. Поперечное сечение канала и имплантата**

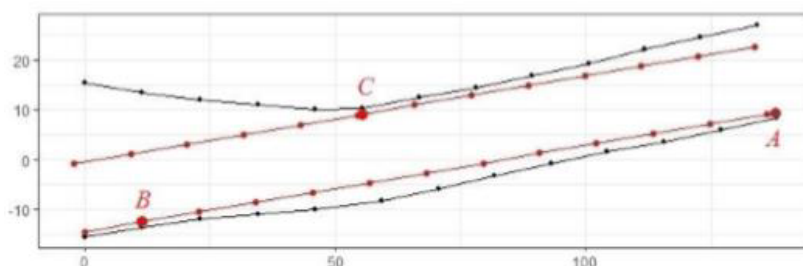
**Выбор оптимального имплантата.** Рассмотрим методику выбора оптимального имплантата и требования к такому имплантату.

Положение имплантата в канале в боковой проекции определяется положением задней стенки имплантата по отношению к задней стенке канала.

В боковой проекции канал и оптимально выбранный имплантат имеет вид изображения на рис. 11, где  $A, B, C$  – проекции точек касания имплантатом канала.

Далее нам будет удобно обозначать узлы задней стенки в боковой проекции через  $(x_j, \xi_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, 12$ .

Построим простую линейную регрессию  $\xi$  на  $x$  по узлам  $(x_j, \xi_j)$  до вершины угла искривления и простую линейную регрессию  $\xi$  на  $x$  по узлам  $(x_j, \xi_j)$  после вершины угла искривления.



**Рис. 11. Проекция точек касания имплантатом стенок канала в боковой проекции**

Заметим, что номер первого угла после вершины искривления равен  $N = [l_\alpha / 11.5] + 1$ , где  $[ ]$  – знак целой части числа. Уравнение линейной регрессии имеет вид:

$$y = \delta + \varphi(x - \bar{x})$$

Оценки для коэффициентов  $\delta$ ,  $\varphi$  получены так:

$$\hat{\delta} = \bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \hat{\varphi} = \frac{R_{12}}{S_1^2},$$

где:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad R_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\xi_i - \bar{\xi}).$$

На рис. 12 изображены графики линии регрессии, построенные по узлам до вершины угла искривления и после вершины угла искривления для канала №2.

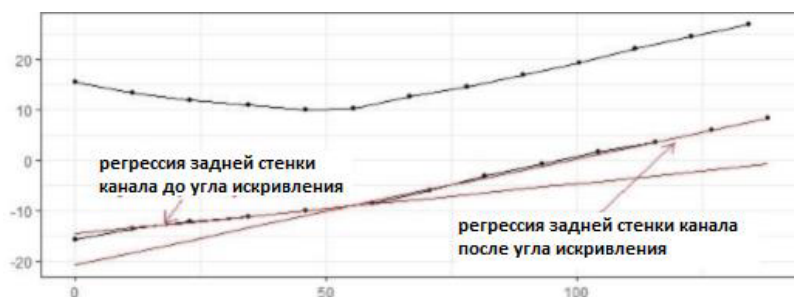


Рис. 12. Графики простой линейной регрессии задней стенки узлов канала до и после угла искривления канала

Далее строим отрезок длиной 138 мм (138 мм длина ножки имплантата на рентгеновском снимке) один конец ( $A'$ ) которого лежит на линии регрессии построенной по узлам после угла искривления, второй конец ( $B'$ ) совпадает с началом канала и лежит на оси  $Oy$ , причём все узлы  $(x_j, \xi_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, 12$ , лежат ниже отрезка  $B'A'$  (см. рис. 13).

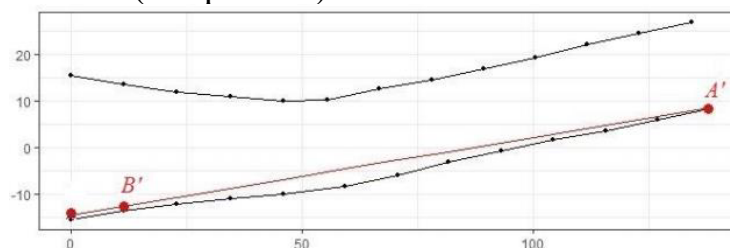


Рис. 13. Положение точек  $A'$  и  $B'$

Пусть  $y = u + kx$  – уравнение прямой, на которой лежит отрезок  $B'A'$  (он определяется однозначно). Отрезок  $BA$ , определяющий положение задней стенки имплантата (точнее её боковой проекции), получается сдвигом

отрезка  $B'A'$  вдоль оси  $Oy$  на величину  $\varepsilon' = \varepsilon / \cos\beta$ , где  $\beta$  – угол наклона отрезка  $B'A'$  к оси  $Ox$ . При этом расстояние от отрезка  $B'A'$  до отрезка  $BA$  равно  $\varepsilon$ , а уравнение прямой на которой лежит отрезок  $BA$  имеет вид:

$$y = u + kx + \varepsilon',$$

или вид:

$$ax + by + c = 0.$$

Далее найдем узел, расстояние от которого до отрезка  $BA$  минимально, и само это минимальное расстояние. Для этого достаточно найти расстояние от каждого узла  $(x_j, \xi_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, 12$ , до отрезка  $BA$ :

$$\frac{|ax_j + by_j + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(см. рис. 14) и выбрать узел, для которого это расстояние минимально. Обозначим этот узел через  $C'(x', y')$ , а расстояние от него до  $BA$  обозначим через  $l'$  (ясно, что для узла  $C'(x', y')$  значение  $x' = [l_\alpha / 11.5] * 11.5$ ). Отсюда получаем, что с одной стороны ширина  $d$  имплантата с прямой ножкой в боковой проекции не может быть больше величины  $l_m = l' - \varepsilon$  (в противном случае имплантат не войдет в канал). В идеале, ширина имплантата  $d$  должна быть равна  $l_m$ :  $d = l_m$ . В этой ситуации имплантат касается как задней стенки канала, так и передней, проекция  $C$  точки касания передней стенке импланта находится на перпендикуляре, опущенным из точки  $C'$  к задней стенке имплантата на расстоянии  $\varepsilon$  от передней стенки канала.

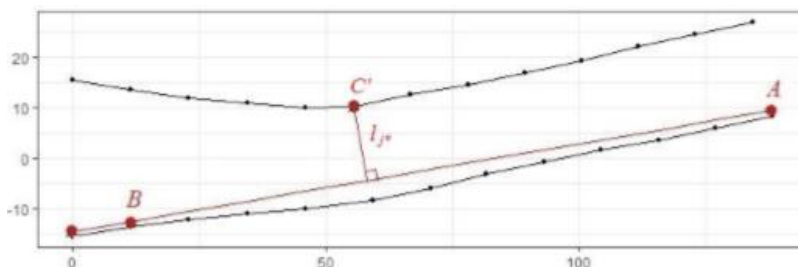


Рис. 14. Точки касания  $A', B', C'$  имплантата стенок канала

С другой стороны, если  $l_m$  оказалась меньше некоторого критического значения  $d_0$ , то в такой канал установить имплантат длиной 138 мм невозможно (имплантаты шириной меньше  $d_0$  не выдерживают нагрузки и не изготавливаются).

Когда мы говорим о выборе имплантата с конической ножкой, то поскольку угол искривления канала и угол сужения имплантата небольшие, можно поступать так, как будто мы имеем имплантат с прямой ножкой, ширина которого совпадает с шириной конической ножки в точке  $x'$ .

Используемые в данной работе данные – выборки из 149 оцифрованных каналов, предоставлены кафедрой травматологии и ортопедии Днепропетровской

государственной медицинской академии. При этом из исходной выборки были исключены данные по 16 каналам. В этих данных были обнаружены явные погрешности при их оцифровке. Поэтому фактически мы имеем дело с выборкой объемом 133.

#### Библиографические ссылки

1. **Лоскутов. А.Е.** Эндопротезирование тазобедренного сустава: Моногр. / Под ред. проф. А.Е.Лоскутова. – Д.; Лира, 2010, – 344с.
2. **Лоскутов А.Е.** Питання оптимального вибору імплантату кульшового суглоба [Текст]/ А.Е. Лоскутов, В.Н. Турчин, А.П. Дегтяренко, О.О. Лоскутов // Питання прикл. математики і мат. моделювання: зб. наук. пр. – Д.; РВВ ДНУ, 2016, с. 91-101.
3. **Турчин В.Н.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник. В.Н.Турчин – Д.: Издательство ДНУ, 2008, – 656 с.

*Надійшла до редколегії 07.09.2018.*

**В.А. Турчина, К.Д. Каравасєв**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ОЦІНОК ДОВЖИНИ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ ВЕРШИН ГРАФУ**

Отримано покращену оцінку знизу часових витрат для задачі пошуку паралельного упорядкування вершин графу з мінімальною довжиною, запропоновано оцінку зверху, обґрунтовано зв'язок задачі із оберненою. На основі обчислювального експерименту досліджено вплив точності оцінки на швидкість знаходження точного розв'язку методом гілок та меж.

**Ключові слова:** дискретна оптимізація, теорія розкладів, оптимальні упорядкування, метод гілок та меж, оцінювання параметрів упорядкування.

Получена улучшенная оценка снизу временных затрат для задачи поиска параллельного упорядочения вершин графа, имеющего минимальную длину, предложена оценка сверху, обоснована связь задачи с обратной. Посредством вычислительного эксперимента исследовано влияние точности оценки на скорость нахождения точного решения методом ветвей и границ.

**Ключові слова:** дискретна оптимізація, теорія розкладів, оптимальні упорядкування, метод гілок та меж, оцінювання параметрів упорядкування.

A number of practical tasks require minimizing the human and material resources that are involved in tasks or time expenditures. A special place in this class of problems is occupied by theoretical problems that have a broad practical application, which belong to a class of discrete optimization problems. When minimizing time expenditures in such problems the question of determining the optimal sequencing of execution of a finite set of works (tasks, operations, projects, etc.) is raised. This sequencing can be linear, circular or parallel. The latter is considered by the authors.

This article is devoted to the analysis of one of the problems of discrete optimization, which belongs to the class of problems of the scheduling theory, and, taking into account its specificity, can be considered as an optimization graph problem. Specifically, in terms of the theory of graphs, the problem of finding a parallel sequencing of vertices of a given graph of minimum length, in which at each place there is no more than a given fixed number of vertices, is under consideration. Since this problem is NP-hard, its exact solution can be found by using one of the methods that implements state search scheme. The authors investigated the impact of the accuracy of the estimation of the length of optimal sequencing on the rate of finding the solution by using one of the most common methods, namely the branch and bound method.

As a result, an improved lower-bound estimate of time expenditures was obtained and an upper-bound estimate was proposed. The latter was used to justify the relationship of the problem under consideration with the inverse one. Also, on the basis of the computational experiment results were obtained that refuted the a priori consideration about the impact of the accuracy of the estimation on the rate of finding the exact solution by using the branch and bound method.



**Keywords: discrete optimization, scheduling theory, optimal ordering, the branch and bound method, estimating ordering parameters.**

**Вступ.** При розв'язанні оптимізаційних задач розрізняють два випадки: або необхідно знайти лише оптимальний розв'язок, або і розв'язок, і оптимальне значення цільової функції. В задачах, що розглядаються у даній роботі, знаходження оптимального розв'язку є головною задачею, оскільки значення цільової функції при цьому знаходиться елементарно. При пошуку цього розв'язку оцінка значення цільової функції може певним чином впливати на сам пошук розв'язку. Саме такий вплив і досліджується в даній роботі, зокрема у випадку, коли розв'язок шукається за схемою спрямованого перебору.

**Постановка задачі.** Розглянемо одну з відомих задач упорядкування вершин орієнтованого графу. Нехай задана скінчена множина робіт, на порядок виконання яких накладаються технологічні обмеження [6,7]. В припущенні, що всі роботи мають однаковий час виконання, необхідно визначити мінімальний час, за який, без порушення технологічних обмежень, всі роботи можуть бути виконані заданою кількістю виконавців. Природно задати технологічні обмеження орієнтовним ациклічним графом  $G(V,U)$ ,  $|V|=n$ , де  $V$  – множина вершин, елементам якої поставлені у відповідність роботи. Тоді дуги відповідають технологічним обмеженням. Одна з оптимізаційних задач, що виникає у цьому випадку – це побудова оптимального паралельного упорядкування, під яким розуміють таке розміщення вершин орграфу по місцях, розташованих у лінію, при якому виконуються наступні умови:

- 1) на кожному місці стоїть не більше заданої кількості вершин, яку позначимо через  $h$ ;
- 2) якщо пара вершин  $(i, j) \in U$ , то вершина  $i$  розміщується лівіше за  $j$ ;
- 3) кількість непорожніх місць (яку ми називаємо довжиною упорядкування і позначаємо  $l$ ), на якому розміщуються всі вершини орграфу мінімальна.

В загальному випадку, тобто для довільних графів  $G$  і ширини  $h$ , для знаходження точного розв'язку застосовують схеми спрямованого перебору, зокрема метод гілок та меж [8-10]. При реалізації схем цього методу одним із важливих питань є питання, як оцінити значення цільової функції як на всій допустимій множині, так і на відповідних підмножинах [1,2,4]. Зупинимось на деяких підходах до таких оцінок.

**Оцінки, що використовують спеціальні упорядкування.** При оцінюванні довжини упорядкування часто використовують два спеціальних упорядкування вершин орграфів  $\underline{S}$  та  $\bar{S}$  [5]. В цих упорядкуваннях кожна вершина орграфу займає відповідно крайнє ліве (упорядкування  $\underline{S}$ ) та крайнє праве ( $\bar{S}$ ) допустиме місце в упорядкуванні, довжина якого дорівнює довжині критичного шляху у графі. Тоді базовою оцінкою будемо вважати

$l^* \geq \max\left(l, \left\lceil \frac{n}{h} \right\rceil\right)$ . При більш детальному аналізі графу було отримано

уточнену оцінку  $l^* \geq \max_k \left( l, \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |\bar{S}[l-i+1]| \right\rceil + k - 1 \right), k = 1, \dots, l$  [3].

Розглянемо поведінку уточненої оцінки для довжини упорядкування, в якій  $\bar{S}$  замінимо на  $\underline{S}$ , тобто

$$l = \max_k \left( l, \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |\underline{S}[l-i+1]| \right\rceil + k - 1 \right), k = 1, \dots, l.$$

Порівняння уточненої та зміненої оцінок проведитимемо при  $h=3$  для графів з рис. 1-3.



Рис. 1. Граф  $G_1$

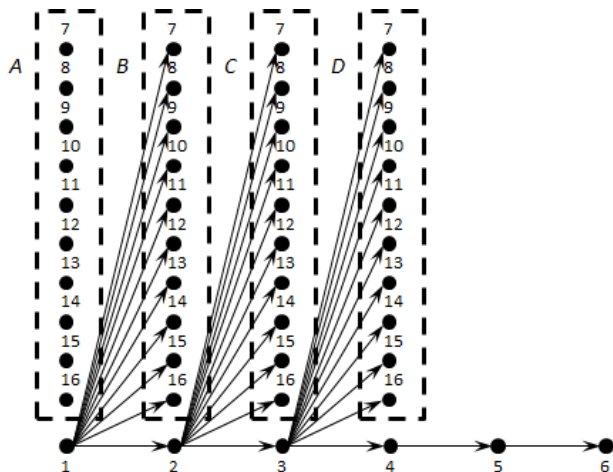


Рис. 2. Графи  $G_2$  (A, B, C, D)

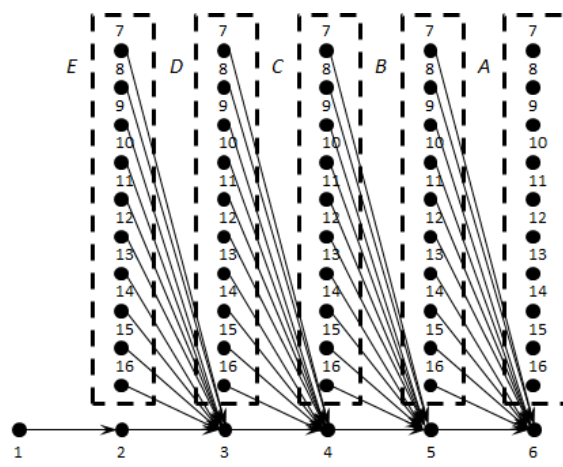


Рис. 3. Графи  $G_3$  (A-E)

Почнемо з графу на рис. 1. Очевидно, що його оптимальне упорядкування має вигляд  $S^* = \{1;2;3;4;5;6\} = \underline{S} = \bar{S}$ , тобто шукана довжина  $l^* = 6$ . Використовуючи уточнену оцінку отримаємо:

1) для  $\bar{S}$ :  $l_1 = \max \left\{ \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil; \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil + 1; \left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil + 2; \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil + 3; \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil + 4; \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil + 5 \right\} = 6;$

2) для  $\underline{S}$ :  $l_2 = \max \left\{ \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil; \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil + 1; \left\lceil \frac{4}{3} \right\rceil + 2; \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil + 3; \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil + 4; \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil + 5 \right\} = 6.$

Бачимо, що у цьому випадку  $l_1 = l_2 = l^*$ .

Розглянемо тепер графи з рис. 2. Випадки A-D відрізняються розташуванням вершин 7-16 та вершиною, з якої йдуть дуги до кожної з зазначених вершин. Помітимо, що, незважаючи на зміну структури, упорядкування  $\bar{S}$  для усіх графів буде однаковим, воно буде відрізнятись від випадку графу з рис.1 тим, що на останньому місці будуть також

знаходиться вершини 7-16. А отже,  $l_1$  для всіх випадків буде однаковим і дорівнюватиме:  $l_1 = 6$ .  $l_2$  та  $l^*$  для різних випадків будуть різними, тому розглянемо далі кожний випадок окремо.

Випадок А. Оптимальним упорядкуванням графу є наприклад таке  $S^* = \left\{ \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ 7, 9, 11, 13, 15, 6 \\ 8 \ 10 \ 12 \ 14 \ 16 \end{array} \right\}$ , отже  $l^* = 6$ . Упорядкування  $\underline{S}$  буде відрізнятися від

упорядкування у випадку графу з рис. 1 тим, що на першому місці будуть знаходитись вершини 1 та 7-16, тоді  $l_2 = 9$ .

Випадок В. Отримаємо  $l^* = 6$ . На відміну від випадку А, вершини 7-16 будуть знаходитись у  $\underline{S}$  на другій позиції, тоді для  $l_2$  отримаємо:  $l_2 = 8$ .

Випадок С. У цьому випадку  $l^* = 7$ .  $\underline{S}$ , аналогічно до випадків А і В, буде містити вершини 7-16 на третьому місці. Для  $l_2$  маємо:  $l_2 = 8$ .

Випадок Д. Довжина оптимального упорядкування  $l^* = 8$ , у  $\underline{S}$  вершини 7-16 стоять на четвертій позиції. Для  $l_2$  отримаємо:  $l_2 = 7$ .

Графи з рис. 3, аналогічно до графів з рис. 2, відрізняються лише розташуванням вершин 7-16 та вершиною, до якої йдуть дуги з усіх зазначених вершин. На відміну від графів з рис. 2, для цих графів упорядкування  $\underline{S}$  буде однаковим і відрізнятиметься від випадку графу з рис. 1 тим, що міститиме вершини 7-16 на першому місці. Тоді  $l_2$  для таких графів приймає сталі значення:  $l_2 = 9$ . Як і для графів з рис. 2,  $l_1$  та  $l^*$  матимуть різні значення, тому дослідимо кожний граф окремо.

Випадок А. Довжина оптимального упорядкування  $l^* = 6$ . Упорядкування  $\bar{S}$  буде відрізнятися від упорядкування для графу з рис. 1 тим, що вершини 7-16 у ньому стоять на останньому місці, тому  $l_1 = 6$ .

Випадок В. У цьому випадку  $l^* = 6$ . У  $\bar{S}$  вершини 7-16 знаходяться на передостанній (п'ятій) позиції, а  $l_1 = 6$ .

Випадок С. Маємо  $l^* = 7$ . В упорядкуванні  $\bar{S}$  вершини 7-16 знаходяться на четвертому місці, аналогічно до випадків А та В. Тоді  $l_1 = 7$ .

Випадок Д. Отримаємо  $l^* = 8$ . Аналогічно до попередніх випадків, у цьому випадку вершини 7-16 будуть знаходитись у  $\bar{S}$  на третій позиції і  $l_1 = 8$ .

Випадок Е. Для цього графу  $l^* = 8$ . Аналогічно, у  $\bar{S}$  вершини 7-16 розташовані на другій позиції,  $l_1 = 8$ .

З аналізу поведінки значень  $l_1$  та  $l_2$  для графів з рис. 1-3 можна зробити такі висновки:

1) оцінку у модифікованому вигляді не можна використовувати окремо ані для оцінювання довжини оптимального упорядкування знизу, ані зверху, оскільки як продемонстровано для графів з рис. 2, вона може бути як більшою, так і меншою за оптимальне значення.

2) уточнена оцінка не завжди має необхідну властивість адаптації під зміну структури графу, як це можна побачити для графів з рис. 2. Це, очевидно, вповільнює пошук розв'язку методом гілок та меж, що говорить про можливість та необхідність її покращення.

3) можна припустити, що для більшості графів хоча б одна з оцінок зміниться при тій чи іншій модифікації множини дуг графу.

Це нашо вухує на думку, що можливо потрібно якомсь об'єднати упорядкування  $\bar{S}$  та  $\underline{S}$  у одній оцінці.

**Уточнення оцінок для довжини упорядкування.** Розглянемо уточнену оцінку знизу. Під графом (позначимо його  $\hat{G}(V, \hat{U})$ ), розгорнутим до графу  $G(V, U)$ , будемо розуміти граф, у якому змінена орієнтація всіх дуг.

Розгорнуте упорядкування до упорядкування  $S$  позначатимемо  $\hat{S}$  (для них виконується  $S[i] = \hat{S}[l - i + 1]$ , де  $l$  – довжина упорядкування  $S$ ).

**Твердження 1.** Якщо  $S$  допустиме упорядкування для графу  $G$  при заданому  $h$ , то  $\hat{S}$  – допустиме упорядкування для  $\hat{G}$  при тому ж  $h$ .

**Доведення.** Від супротивного. Нехай  $S$  – допустиме для  $G$ , а  $\hat{S}$  не є допустимим для  $\hat{G}$ . Тоді знайдеться дуга  $(c, d) \in \hat{U}$  така, що  $d$  знаходиться у  $\hat{S}$  раніше, аніж вершина  $c$ , але тоді у  $S$  вершина  $d$  знаходиться пізніше, ніж вершина  $c$ , що неможливо, оскільки  $(d, c) \in U$  за визначенням  $\hat{G}$  та  $S$  – допустиме упорядкування. Отже, отримали протиріччя, що впливає з неправильного припущення. ■

**Наслідок 1.** Якщо  $S^*$  – оптимальне упорядкування для  $G$ , тоді  $\hat{S}^*$  – оптимальне упорядкування для графу  $\hat{G}$  при заданому  $h$ .

**Доведення.** Від супротивного. Нехай  $S^*$  – оптимальне упорядкування для  $G$  при заданому  $h$ , проте  $\hat{S}^*$  не є оптимальним для графу  $\hat{G}$ . Тоді існує таке упорядкування  $\hat{S}'$ , що  $l(\hat{S}') < l(\hat{S}^*)$ . Тоді з твердження 1 випливає, що  $S'$  – допустиме для  $G$  і  $l(S') < l(S^*)$ , значить  $S^*$  не є оптимальним. Отже, отримали протиріччя, що впливає з неправильного припущення. ■

**Наслідок 2.** Довжини оптимальних упорядкувань для графів  $G$  та  $\hat{G}$  співпадають при заданому  $h$ .

**Доведення.** Впливає безпосередньо з наслідку 1. ■

**Твердження 2.**  $l = \max_k \left( l, \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |S[i]| \right\rceil + k - 1 \right), k = 1, \dots, l$  є оцінкою знизу

для довжини оптимального упорядкування  $l^*$  для графу  $G$  та заданого  $h$ .

**Доведення.** Розглянемо граф  $G$ . З означення графу  $\hat{G}$  випливає, що вершинам без вхідних дуг з  $G$  відповідають вершини без вихідних дуг у  $\hat{G}$  і навпаки, тоді  $\bar{S}$  для графу  $\hat{G}$  співпадає з розгорнутим  $\underline{S}$  для графу  $G$ . Розглянемо оцінку знизу для довжини оптимального упорядкування для

графу  $\hat{G}$ :  $l^* \geq \max_k \left( l, \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |\bar{S}[l-i+1]| \right\rceil + k - 1 \right), k = 1, \dots, l$ . Тоді, оскільки  $\bar{S}$  для  $\hat{G}$  співпадає із  $\hat{S}$ , де упорядкування  $\underline{S}$  відповідає графу  $G$ , і  $\hat{S}[l-i+1] = \underline{S}[i]$ , отримаємо для графу  $\hat{G}$ :  $l^* \geq \max_k \left( l, \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |\underline{S}[i]| \right\rceil + k - 1 \right), k = 1, \dots, l$ . Але, тоді за наслідком 2, це справедливо і для графу  $G$ . ■

**Твердження 3.**  $l = \max \left( l, \max_k \left( \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |\bar{S}[l-i+1]| \right\rceil + k - 1 \right), \max_k \left( \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |\underline{S}[i]| \right\rceil + k - 1 \right) \right), k = 1, \dots, l$  – оцінка знизу для довжини оптимального упорядкування  $l^*$  для графу  $G$  та заданого  $h$ .

**Доведення.** Впливає з того, що кожен з аргументів зовнішнього максимуму є оцінкою знизу, та властивості максимуму: якщо  $c \geq a$  і  $c \geq b$ , то  $c \geq \max(a, b)$ . ■

Перейдемо до оцінки зверху. Використовуючи, наприклад, упорядкування  $\underline{S}$  побудуємо нове упорядкування  $S'$  за наступним правилом: якщо  $\underline{S}[i]$  містить не більше  $h$  вершин, то залишаємо її без змін, інакше розділимо її на  $\lceil |\underline{S}[i]|/h \rceil$  множин, у кожній з яких буде не більше  $h$  вершин. Отримане упорядкування є допустимим, оскільки отримане з  $\underline{S}$ , а отже відношення порядку не порушується, і на кожній позиції стоїть не більше  $h$  вершин. Тоді його довжина буде не меншою аніж довжина оптимального, оскільки воно є допустимим. Отже, можемо використати її як оцінку зверху для довжини оптимального упорядкування, тобто:  $l^* \leq \sum_{i=1}^l \lceil |\underline{S}[i]|/h \rceil$ .

Нескладно побачити, що аналогічні міркування можна застосувати і до  $\bar{S}$ , і до будь-якого іншого упорядкування, у якому не порушується відношення порядку. Тоді можна дещо уточнити оцінку зверху, використовуючи  $\bar{S}$ :  $l^* \leq \min \left( \sum_{i=1}^l \lceil |\underline{S}[i]|/h \rceil, \sum_{i=1}^l \lceil |\bar{S}[i]|/h \rceil \right)$ .

Можна припустити, що чим менше вершин знаходиться на кожному місці в упорядкуванні, до якого можна застосувати наведені міркування, тим ближче отримана оцінка буде до істинного значення. Поставимо мету серед усіх таких упорядкувань із заданою довжиною  $l$  знайти таке, у якого на кожному місці буде мінімальна кількість вершин. Розв'язок задачі  $S(G, l, h)$  якраз і буде цим шуканим упорядкуванням. У якості  $l$  можна використати будь-яку оцінку знизу для довжини оптимального упорядкування. Зрозуміло, що чим точнішою буде оцінка знизу, тим менше буде  $h^*$ , а отже оцінка зверху буде точнішою. Отже, оцінка зверху набуває вигляду:

$l^* \leq \sum_{i=1}^l \lceil |S^*[i]|/h \rceil$ , де  $S^*$  – оптимальне упорядкування для задачі  $S(G, l, h)$ , де  $l \leq l^*$ .

Помітимо, що останнє співвідношення не лише показує зв'язок між оцінками зверху та знизу для довжини оптимального упорядкування, а ще й зв'язок між їх точністю. Окрім цього, воно показує деякий зв'язок між задачами  $S(G, l', h)$  та  $S(G, h', l)$  при деяких  $l'$  та  $h'$ , а у деяких випадках і між їх алгоритмічними складностями. Так, наприклад, якщо оптимальне упорядкування для графу  $G$  є щільним, то оцінка  $l^* \geq \lceil n/h \rceil$  є точною, а тоді, якщо взяти  $l = \lceil n/h \rceil$  у задачі  $S(G, l, h)$ , то отримаємо оцінку зверху  $l^* \leq \lceil n/h \rceil$ , оскільки щільне упорядкування існує. А тоді задачі пошуку щільних упорядкувань для задач  $S(G, l', h)$  та  $S(G, h', l)$  мають однакову алгоритмічну складність.

**Порівняльний аналіз оцінок.** Проаналізуємо поведінку відомих оцінок знизу довжини упорядкування

$$l^* \geq \max \left( l, \left\lceil \frac{n}{h} \right\rceil \right), \quad l^* \geq \max_k \left( l, \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |S[l-i+1]| \right\rceil + k - 1 \right), \quad k = 1, \dots, l$$

та запропонованої оцінки

$$l^* \geq \max \left( l, \max_{1 \leq k \leq l} \left( \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |S[l-i+1]| \right\rceil + k - 1 \right), \max_{1 \leq k \leq l} \left( \left\lceil \frac{1}{h} \sum_{i=k}^l |S[i]| \right\rceil + k - 1 \right) \right).$$

Незважаючи на різну «точність» оцінок, в одних випадках вони можуть давати один і той самий результат, а у деяких уточнені оцінки можуть зменшити кількість операцій, необхідних для знаходження оптимального упорядкування.

Можна припустити, що чим точнішою є оцінка, тим менше знадобиться розгалужень аби знайти оптимальний розв'язок.

Перевіримо цю гіпотезу, провівши наступний обчислювальний експеримент за допомогою розробленої програми. Будемо генерувати випадковий довільний граф або граф, де усі вершини знаходяться на критичних шляхах, із заданою кількістю вершин. Для пошуку його оптимального упорядкування застосуємо алгоритм гілок та меж з різними оцінками знизу для довжини. І порівняємо кількість вершин у отриманому дереві варіантів. Проведемо попарне порівняння. Розглядаємо графи з кількістю вершин від 10 до 100, причому розділимо цей проміжок на 4: [10, 20], [21, 40], [41, 60] та [61, 100]. Для кожного проміжку ширина упорядкування обирається довільно, але не перевищує половини верхньої грані кількості вершин у проміжку. Для кожного проміжку проведено по 10000 експериментів. Виконання алгоритму зупиняється, якщо кількість вершин у дереві перевищує у 30 разів верхню межу кількості вершин у проміжку в перших трьох випадках та у 10 разів для останнього випадку (зменшення пов'язано з тим, що таке обмеження помітно не впливає на відсоток графів, для яких за цих умов не встигаємо отримати оптимальне

упорядкування, проте дуже впливає на час виконання програми). Усі попередні умови підсумовані у вигляді таблиці 1.

Результати усіх порівнянь наведені у таблиці 2. Результати містять кількість тестових випадків, в яких алгоритм при використанні першої оцінки завершився швидше (потребував менше вершин у дереві варіантів аби отримати оптимальне упорядкування), в яких завершився швидше, при використанні другої оцінки, та в яких алгоритм потребував однакової кількості розгалужень. Окрім цього, результати містять частку випадків, для яких алгоритм не встиг завершитись за задану максимальну кількість розгалужень.

Таблиця 1

## Значення параметрів, що використовувались при тестуванні

$n$	$h$	Кількість тестів	Кількість вершин у дереві
[10, 20]	[2, 10]	10000	600
[21, 40]	[2, 20]	10000	1200
[41, 60]	[2, 30]	10000	1800
[61, 100]	[2, 50]	10000	1000

Таблиця 2

## Результати тестування для усіх пар оцінок

Перемогла оцінка (1)	Нічия	Перемогла оцінка (2)	Частка незавершених
Базова(1) оцінка та уточнена(2) оцінка (випадкові)			
0	9683	317	0,0217
2	9661	337	0,0703
1	9718	281	0,0947
0	9888	112	0,1033
Базова(1) оцінка та уточнена(2) оцінка (критичні)			
0	9551	449	0,0325
1	9619	380	0,0918
0	9731	269	0,1349
0	9876	124	0,1293
Базова(1) оцінка та запропонована(2) оцінка (випадкові)			
2	9565	433	0,0227
4	9558	438	0,0701
2	9639	359	0,0875
0	9842	158	0,1002
Базова(1) оцінка та запропонована(2) оцінка (критичні)			
0	9410	590	0,0256
2	9426	572	0,0903
2	9576	422	0,1282
1	9852	147	0,1167

Продовження таблиці

Уточнена(1) оцінка та запропонована(2) оцінка (випадкові)			
0	9922	78	0,0239
0	9893	107	0,0614
0	9892	108	0,0904
0	9949	51	0,1005
Уточнена(1) оцінка та запропонована(2) оцінка (критичні)			
0	9743	257	0,0254
3	9780	217	0,0907
3	9867	130	0,1274
0	9975	25	0,1252

З результатів тестування можна помітити наступне:

1) у переважній більшості випадків (94%) для всіх пар оцінок методу гілок та меж знадобилася однакова кількість розгалужень, тобто суто статистично покращення у якості оцінювання є незначним.

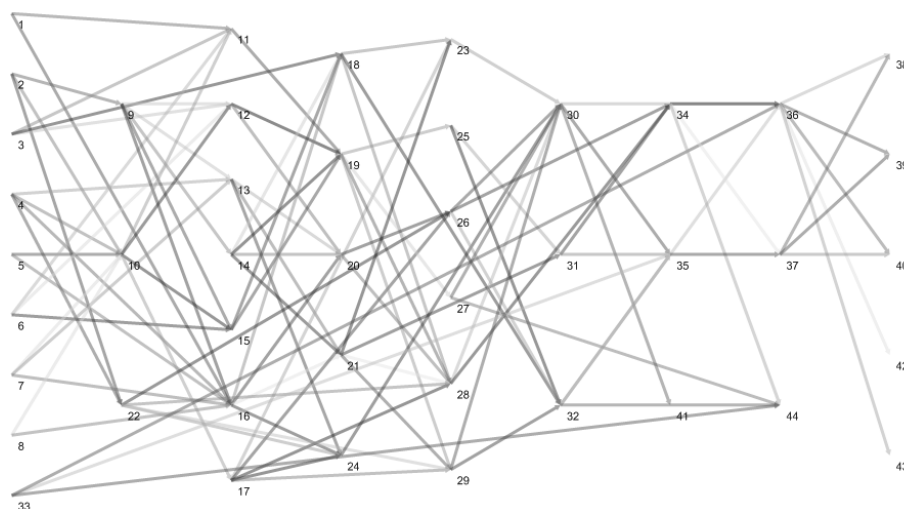
2) зі збільшенням кількості вершин графу кількість випадків, у яких точніші оцінки перемагають, зменшується. Для графів, де кількість вершин змінюється у проміжку [60;100], кількість таких випадків не перевищує 2%.

3) існують графи, для яких оптимальне упорядкування можна отримати за меншу кількість кроків, якщо використовувати менш точну оцінку. Наприклад, для графу з рис. 4 можна отримати оптимальне упорядкування при  $h=5$  у 3 рази швидше, якщо замість уточненої оцінки використовувати базову (879 проти 290).

Можемо зробити наступні висновки щодо результатів тестування: базова оцінка майже завжди не поступається більш точним, а іноді й перевершує їх; якість оцінок спадає із збільшенням числа вершин графу, а отже і з ускладненням їх структури, тому використання простіших оцінок є доцільнішим, оскільки їх знаходження потребує меншого числа операцій; існують такі графи, які суперечать принципу «точніше – краще», що говорить про те, що, можливо, навіть для абсолютно точної оцінки знайдуться приклади, для яких метод гілок та меж знаходить оптимальне упорядкування повільніше, аніж при використанні гірших оцінок.

Такий ефект пов'язаний із тим, що обираються вершини і відповідні упорядкування, які спочатку мали менші оцінки через неточність оцінки, але на шляху до оптимального упорядкування потребували менше розгалужень. З останнього випливає, що, можливо, краще розглядати не просто оцінки знизу, а деякі метрики, які не обов'язково є оцінками довжини оптимального упорядкування, проте для яких виконується, що кращі (описані вище) упорядкування мають менші значення метрики.





**Рис. 4. Приклад графу, для якого базова оцінка знаходить оптимальне упорядкування швидше ніж уточнена**

**Висновки.** Отримані результати дозволяють зробити висновок, що не завжди більш точна оцінка довжини упорядкування приводить до зменшення кількості вершин у дереві варіантів, що ілюструє роботу методу гілок та меж. Тому невирішеним питанням залишається апріорне отримання точного значення оптимальної довжини упорядкування.

#### Бібліографічні посилання

1. **Fernandez E.B.** Bounds on the number of processors and time for multiprocessor optimal schedules [Text] / E.B. Fernandez, B. Busspell // IEEE Trans. Comput. – 1973. – С–22. – Р. 745–751.
2. **Graham R.L.** Bounds on multiprocessing timing anomalies [Text] / R.L. Graham // SIAM J. Appl. Math. – 1964. – № 2. – Р. 416–429.
3. **Hu T.C.** Parallel sequencing and assembly line problems [Text] / T.C. Hu // Oper. Res. – 1961. – Р. 841–849.
4. **Бекишев Г.А.** Обоснование алгоритма Т.С. Ху [Текст] / Г.А. Бекишев // Матем. анализ и его приложения. – Ростов–н/Д. – 1974. – Т.5. – С. 120–126.
5. **Бурдюк В.Я.** Алгоритмы параллельного упорядочения [Текст] : учебное пособие / В.Я. Бурдюк, В.А. Турчина. – Днепропетровск: ДГУ, 1985. – 84 с.
6. **Танаев В.С.** Введение в теорию расписаний [Текст] / В.С. Танаев, В.В. Шкурба. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
7. **Танаев В.С.** Теория расписаний. Групповые технологии [Текст] / В.С. Танаев, М.Я. Ковалев, Я.М. Шафранский. – Мн.: Университетское, 1998. – 290 с.
8. **Тушкина Т.А.** Методы и программы генерирования случайных графов [Текст] / Т.А. Тушкина. – Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1975. – № 54. – С. 259–264.
9. **Шахбазян К.В.** Метод ветвей и границ для задачи параллельного упорядочивания [Текст] / К.В. Шахбазян, Т.А. Тушкина. – Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1973. – № 35. – С. 146–155.
10. **Шахбазян К.В.** Обзор методов составления расписаний для многопроцессорных систем [Текст] / К.В. Шахбазян, Т.А. Тушкина. – Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1975. – № 54. – С. 229–258.

*Надійшла до редколегії 16.06.2018.*

**В.А. Турчина, Д.О. Танасієнко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ЗАСТОСУВАННЯ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ ДО ЗАДАЧІ СКЛАДАННЯ НАВЧАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ**

Розглянуто один з відомих підходів, який можна використовувати при складанні навчального розкладу. Запропонована схема генетичного алгоритму, результатом роботи якої є отримання наближеного розв'язку задачі складання розкладу з необхідністю подальшого його покращення іншими евристичними методами.

**Ключові слова:** генетичний алгоритм, навчальний розклад, евристичні методи.

Рассмотрен один из известных подходов, который можно использовать при составлении учебного расписания. Предложена схема генетического алгоритма, результатом работы которой является получение приближенного решения задачи составления расписания с необходимостью дальнейшего его улучшения другими эвристическими методами.

**Ключевые слова:** генетический алгоритм, учебное расписание, эвристические методы.

One of the main tasks in organizing the educational process in higher education is the drawing up of a schedule of classes. It reflects the weekly student and faculty load. At the same time, when compiling, there are a number of necessary conditions and a number of desirable. The paper considers seven required and four desirable conditions. In this paper, one of the well-known approaches that can be used in drawing up a curriculum is considered. The proposed scheme of the genetic algorithm, the result of which is to obtain an approximate solution to the problem of scheduling with the need to further improve it by other heuristic methods.

To solve the problem, an island model of the genetic algorithm was selected and its advantages were considered. In the paper, the author's own structure of the individual, which includes chromosomes in the form of educational groups and genes as a lesson at a certain time, is presented and justified. The author presents his own implementations of the genetic algorithms. During the work, many variants of operators were tested, but they were rejected due to their inefficiency. The biggest problem was to maintain the consistency of information encoded in chromosomes. Also, two post-steps were added: to try to reduce the number of teacher conflict conflicts and to normalize the schedule - to remove windows from the schedule. The fitness function is calculated according to the following principles: if some desired or desired property is present in the individual, then a certain number is deducted from the individual's assessment, if there is a negative property, then a certain number is added to the assessment. Each criterion has its weight, so the size of the fine or rewards may be different. In this work, fines were charged for non-fulfillment of mandatory conditions, and rewards for fulfilling the desired.

**Keywords:** genetic algorithm, educational schedule, heuristic methods.

**Вступ.** Математиці завжди було притаманне прагнення розробляти ефективні методи розв'язання якомога ширших класів задач. Багаторічний досвід розвитку теорії дискретних і комбінаторних задач та практика їх

розв'язання показали, що ці дві сторони – загальність метода і його ефективність – знаходяться у відомому антагонізмі. Разом з тим, дуже важливо знати, і особливо це стосується задач дискретної оптимізації, що відносяться до NP-складних [1], чи можна в принципі сподіватися на створення досить загальних і ефективних методів або треба свідомо йти шляхом розбиття задач на все більш вузькі класи і, користуючись їх специфікою, розробляти для них ефективні (хороші) алгоритми.

У випадках, коли точні методи мають експоненційну складність, доцільно застосовувати наближені алгоритми. Одним із підходів, що досить ефективно зарекомендував себе для отримання наближених розв'язків, є використання генетичних алгоритмів. Саме цей підхід і розглядається в даній роботі.

**Постановка задачі.** Однією з основних задач при організації навчального процесу у ЗВО є складання розкладу занять. Він відображає тижневе аудиторне навантаження студентів та викладачів. При цьому, при складанні розкладу занять є ряд необхідних умов та ряд бажаних. До необхідних умов, зокрема, відносяться наступні:

- обсяг аудиторного навантаження на студента визначається навчальним планом підготовки спеціалістів та відповідним робочим навчальним планом, який стосується конкретного року. Зазвичай тижневе аудиторне навантаження змінюється в діапазоні 18-22 год;

- в один день не можна планувати більше 8 год;
- не повинно бути “вікон”, тобто, не повинно бути перерв, більших за 20 хвилин;
- деякі заняття повинні проводитись в спеціалізованих класах;
- один викладач не може проводити одночасно заняття в двох аудиторіях;
- викладання деяких дисциплін планується одночасно для різних спеціальностей;
- заняття повинні починатись і закінчуватись у відведений часовий проміжок.

Розклад, що задовольняє наведеним вимогам, будемо вважати допустимим. Крім обов'язкових, бажаним є виконання і наступних вимог:

- не планувати на викладача в один день обсяг занять більше встановленої норми;
- не планувати на студентів в один день обсяг лекційних занять більше встановленої норми;
- не планувати на один день заняття, що проводяться в різних корпусах;
- наявність дня самостійної роботи.

Розклад, який задовольняє необхідним та бажаним умовам, будемо вважати допустимим.

В даній роботі не враховуються наступні фактори:

- доступність аудиторій та їх тип (лекційна, практична, лабораторія);
- неповне навантаження (заняття за предметом закінчуються (починаються) раніше, ніж закінчується (починається) семестр).

**Вибір генетичного алгоритму.** Для розв'язання поставленої задачі було обрано острівну модель генетичного алгоритму. Цей вибір мотивовано наступними його перевагами:

- **Асинхронність.** Кожен острів може незалежно від інших виконувати розрахунки. Враховуючи багатопоточність сучасних CPU (також, можна застосовувати GPU), цей факт дає велику перевагу, бо за одну одиницю часу виконується більше роботи, чим інші непаралельні ГА. Це дає більшу вірогідність, що результат є найкращим (або близький до нього).

- **Різноманітність алгоритмів кожного острова.** Кожний острів може мати певну «спеціалізацію» – спеціально підібрані оператори генетичного алгоритму, які виконують певну задачу (широкий пошук по всьому простору «добрих» індивідів або покращення існуючого генотипу, прямування до локального (а можливо і глобального) екстремуму).

- **Міграції між островами.** Цей процес дозволяє популяціям з різних островів отримувати генотипи, яких раніше вони не мали або не могли згенерувати, використовуючи наявні оператори відбору.

Тут використовуються такі відомі поняття:

- острів – елемент алгоритму, який вміщує в себе популяцію та оператори ГА для роботи над нею;

- епоха – час (або крок алгоритму), за який з популяцією на острові відбуваються зміни (з'являються нові та вмирають індивіди);

- GPU (англ. *Graphics Proccesing Unit, GPU*) — окремий пристрій персонального комп'ютера або ігрової приставки, виконує графічний рендеринг;

- CPU (англ. *Centralprocessingunit, CPU*) — функціональна частина комп'ютера, що призначена для інтерпретації команд.

**Опис основних елементів ГА.** Розглянемо модель по спадному принципу. Поняття індивід (рис. 1) ототожнимо з розкладом на тиждень. Такий варіант обрано, так як в навчальних закладах розклади в переважній більшості складаються на тиждень.

Наступним елементом деталізації є хромосоми. Кожна хромосома відповідає розкладу однієї групи на тиждень. Тобто, кожен індивід складається з  $n$  хромосом (груп). Наступна структура хромосоми (рис. 1) виявилась найбільш вдалим варіантом. Перед нею випробувано декілька варіантів, які були відкинуті у зв'язку з тим, що для них надто важко, або взагалі неможливо, побудувати генетичні оператори, які б не вироджували інформаційну структуру індивідуума.

Кожна хромосома складається з генів. Кожен ген представляє собою

пару  $\{Task, Timepoint\}$ . Причому, якщо  $Task$  (рис. 2) – є завданням на 2 академічні години, то  $Timepoint$  може приймати лише парні значення. Також це означає, що завдання присутнє як і за чисельником, так і за знаменником.

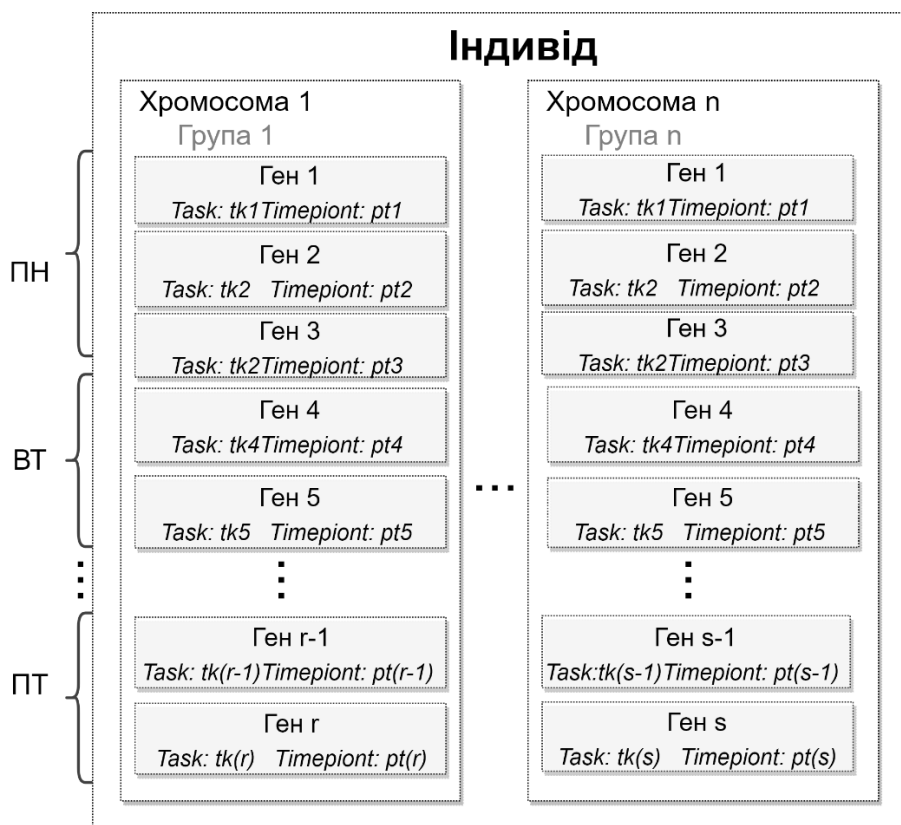
Вхідні дані представляють наряди на розклад, які вже мають певну структуру. А саме, в ньому вказується який викладач (викладачі), в якій групі, скільки академічних годин буде вести конкретний предмет (практичні чи лекційні заняття).

**Опис деяких використовуваних операторів генетичного алгоритму.**

Оператор відбору батьків. Тут використовувалися звичайні оператори [2]:

- панміксія;
- елітарний;
- рулеточний відбір.

Оператор кроссоверу. Тут задача була складнішою, адже вигляд індивіда є нетиповим для ГА. В ході роботи випробувано велику кількість варіантів оператора, але вони були відкинуті у зв'язку зі своєю неефективністю.



**Рис. 1. Схема індивіда та хромосом**

Оператор кроссоверу. Тут задача була складнішою, адже вигляд індивіда є нетиповим для ГА. В ході роботи випробувано велику кількість варіантів оператора, але вони були відкинуті у зв'язку зі своєю неефективністю. Найбільшою проблемою було збереження несуперечливості інформації закодованої в хромосомах. Наприклад, якщо використовувати простий обмін генами – одноточковий кроссовер, то з великою ймовірністю на один і той же час назначалося два завдання.

Task	
+	Teacher from teachers
+	Subject from subjects
+	Group from groups
+	Duration from {FULL, HALF}
+	Type from {LECTURE, PRACTICE}
+	empty(): bool

Рис. 2. Схема Task

Тому у роботі використовувався наступний варіант кроссоверу: якщо на один і той же час припадало дві задачі, то час віддавався гену першого батька, у всіх інших випадках – гену другого батька. На спрощеній схемі це виглядає так:

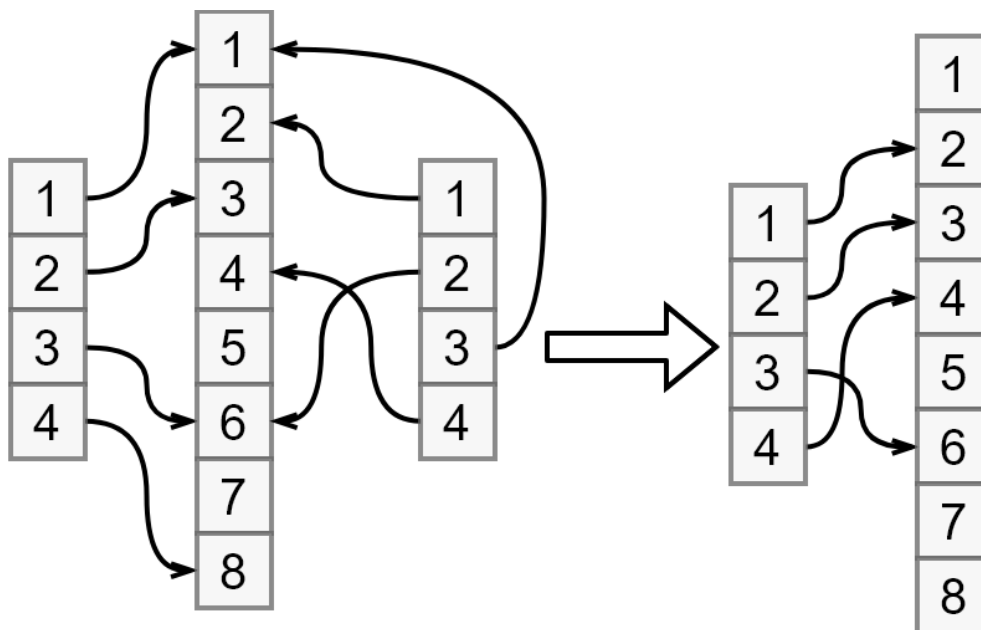


Рис. 3. Схема роботи кроссоверу

При мутації для кожної хромосоми індивіда змінюються деякі значення генів. Зміна може бути наступна: або обмін часом з іншим геном, або перенести на будь-який інший доступний час. Це відбувається так: вибирається випадковий час, якщо цей час зайнятий іншим геном, то обмінюємо місцями час. Якщо ні – то час встановлюємо відповідно отриманому випадковому значенню.

Також було додано два пост-кроки:

- 1) спробувати зменшити кількість конфліктів зайнятості викладача;
- 2) нормалізувати розклад, тобто видалити «вікна» з розкладу.

Пост-кроки були введені у зв'язку з тим, що дія оператора кроссоверу та мутації майже одразу створювала індивідів, з великою функцією фітнесу –

індивіди були далекі від допустимої множини. Але загальний генетичний алгоритм, не передбачає такі кроки. Тому довкола оператора мутації було створено *wгаррег*, який маскується під оператора кроссоверу та вже всередині себе викликає потрібного оператора і робить необхідні додаткові дії.

Для зменшення кількості конфліктів зайнятості викладача знаходяться всі гени, в яких одні і ті ж викладачі, призначені на один і той самий час, та випадковим чином розподіляються по розкладу. Хоч це і не гарантує, що конфлікти знову не будуть створені, але такий метод швидкий і не суперечить принципам ГА.

Для нормалізації розкладу необхідно в межах кожного дня змінити значення часу в генах так, щоб не було «вікон». Це робиться наступним чином: знаходяться всі гени для певного дня, сортуються в порядку слідування та час кожного гена здвигається в напрямку першого.

Функція фітнесу [3] розраховується за наступними принципами: якщо деяка необхідна або бажана властивість присутня у індивіда, то від оцінки індивіда віднімається певне число, якщо ж присутня негативна властивість, то певне число додається до оцінки. Кожен критерій має свою вагу, тому розмір штрафу або винагороди можуть бути різними. В даній роботі штрафи нараховувалися за невиконання обов'язкових умов, а винагороди за виконання бажаних. Як можна бачити, це задача мінімізації цільової функції.

Готовий індивід має таку структуру:

- 24 хромосоми, тобто на факультеті навчаються 24 групи;
- в середньому, кількість генів дорівнювала 10, так як гени генеруються випадковим чином, але так, щоб навантаження на групу, якій відповідає хромосома, була в межах від 18 до 22 годин.

Програмна реалізація відповідає принципам закладеним в [4].

**Висновки.** Запропонований алгоритм дозволяє знаходити відносно непогані наближені розв'язки. Для подальшого покращення результатів потрібно використовувати класичні алгоритми комбінаторної оптимізації. Для повного завершення програмного комплексу необхідно додати модуль класичної оптимізації, утворивши конвеєр. Також можна зауважити, що розроблений ГА швидко збігається, тому не слід задавати велику кількість епох.

#### Бібліографічні посилання

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Текст] / Гэри М., Джонсон Д. – М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. **Панченко Т.В.** Генетические алгоритмы: Учебно-методическое пособие / под ред. Ю.Ю. Тарасевича [Текст] / Панченко Т.В. – Астрахань: АГУ, 2007. –87 с.
3. **Батищев Д.И.** Генетические алгоритмы решения экстремальных задач Нижегородский госуниверситет. [Текст] /Батищев Д.И. – Нижний Новгород: 1995.с. – 62с.
4. **Koza J. R.** Genetic Programming [Текст] / Koza J. R. – Cambridge: The MIT Press, 1998.— 609 с. — ISBN 0-262-11170-5

Надійшла до редколегії 19.09.2018.

## ДО ВІДОМА АВТОРІВ

У статті подають представлені результати нових досліджень автора з повним їх обґрунтуванням. Посилання на неопубліковані праці недопустиме. Статті можуть бути написані українською, російською та англійською мовами. Оптимальний обсяг статті – до 12 сторінок.

Структура рукопису статті (згідно з вимогами Постанови ВАК України № 7-05/1 від 15 січня 2003 р.):

- **анотація** трьома мовами (українська, російська, англійська) – не більше 5 рядків. Якщо стаття написана українською мовою, обсяг англійської анотації повинен складати не менш 1800 знаків. Якщо мова статті – російська, обсяг англійської та української анотації повинен складати не менш 1800 знаків.
- **Ключові слова** – трьома мовами (українська, російська, англійська);
- постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими або практичними задачами, аналіз досягнень і публікацій за тематикою дослідження даної проблеми, наголошення на невирішених раніше питаннях загальної проблеми, розглядуваних у статті (**Вступ**);
- постановка розглядуваної задачі (**Постановка задачі**);
- викладення основного матеріалу з повним обґрунтуванням одержаних наукових результатів (**Метод розв'язання та Аналіз одержаних результатів**);
- висновки за проведеними дослідженнями і перспективи подальших досліджень (**Висновки**).
- На окремому аркуші додати назву статті, прізвища авторів та їх місце роботи трьома мовами (українська, російська, англійська).

### Вимоги до набору:

- текст слід набирати в MS Word 97-2003 (\*.doc), **шрифт** – Times New Roman;
- формат паперу – А4 (210x297), книжкова орієнтація;
- параметри сторінки (поля):
  - верхнє – 20 мм;
  - нижнє – 20 мм;
  - лівє – 25 мм;
  - правє – 20 мм.



- автоматичні переноси; сторінки не нумерують, відсутність «висячих» рядків; абзац (відступ першого рядка) – 5 мм;
- стиль і форматування для елементів статті (таблиця):

<b>УДК</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 14 pt, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Ініціали і прізвища авторів</b> (прізвище, ім'я, по батькові)	<i>Шрифт:</i> Times, 14 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний;
<b>Місце роботи</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 12 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Назва статті</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 14 pt, напівжирний, прямий, усі літери великі; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Анотація</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 12 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>інтервал після:</i> 12 pt
<b>Основний текст статті</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 14 pt, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
<b>Заголовки структурних елементів статті</b> (вступ, постановка задачі, висновки)	<i>Шрифт:</i> Times, 14 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
<b>Заголовок «Бібліографічні посилання»</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 12 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
<b>Бібліографічні посилання в алфавітному порядку</b> (зразок наведено нижче)	<i>Шрифт:</i> Times, 12 pt, (ПБ – напівжирний, решта ні) прямий, нумерований список; <i>вирівнювання:</i> за шириною; <i>відступ:</i> номери – 0 мм, <i>тексту:</i> 5 мм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
<b>Дата надходження до редколегії</b>	<i>Шрифт:</i> Times, 12 pt, курсив; <i>вирівнювання:</i> за лівим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний

<b>Підписунокві</b> <b>підписи</b>	<i>Шриффт:</i> Times, 12 pt, напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою
---------------------------------------	--

<b>Назва таблиці</b> (перший рядок: слово <i>Таблиця</i> ; другий: її назва)	<i>Шриффт:</i> Times, 12 pt, <i>перший рядок:</i> курсив; <i>вирівнювання:</i> за правим краєм; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний; <i>другий рядок:</i> напівжирний, прямий; <i>вирівнювання:</i> за серединою; <i>міжрядковий інтервал:</i> одинарний
---	--

**УВАГА!**

Лапки : « »

Дефіс : - .

Тире : – .

- **УВАГА! Бібліографічні посилання оформлюють за зразком:**

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <b>Слезкин, Н.А.</b> Динамика вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / Н.А. Слезкин. – М., 1955. – 493 с.</li> <li>2. <b>Белоносов, С.М.</b> Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса [Текст] / С.М. Белоносов, И.Л. Черноус. – М., 1985. – 312 с.</li> <li>3. <b>Евдокимов, Д.В.</b> Построение матриц фундаментальных решений для системы уравнений Стокса [Текст] / Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков, А.Н. Фетищев // Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та. – 2003. – № 3 (19). – С. 127–130.</li> <li>4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами [Текст] / под ред. М. Абрамович, И. Стиган. – М., 1979.</li> <li>5. <b>Остапенко, Н.А.</b> Необходимые и достаточные условия существования периодических решения в системах с переменной структурой [Текст] / Н.А. Остапенко // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. «Математика» – 2002. – Вып. 7. – С. 56–58.</li> <li>6. <b>Перехрест, В.І.</b> Новий клас розв'язків гідродинамічних рівнянь Ейлера для осесиметричних вихорових течій [Текст] / В.І. Перехрест // Доп. НАНУ. – 2004. – № 3. – С. 35–42.</li> <li>7. <b>Перехрест, В.І.</b> Кінематика взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання та інтенсивності [Текст] : зб. наук. пр. / В.І. Перехрест, О.А. Мельник // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2003. – С. 141–148.</li> </ol>
---

- рисунки виконують у будь-якому форматі, імпортованому графічними фільтрами MS Word. Рисунки вставляють у текст статті

як окремий незалежний об'єкт (положення — у тексті), при цьому можна пересувати текст стосовно нього. Під рисунком обов'язково подають пояснювальний підпис із номером рисунка.

- формули набирають у редакторі MathType (Шрифт: Times, 14 pt); якщо формула з номером, то вирівнюють за правим краєм, якщо ні – за серединою з стандартними установками. Латинські букви у формулах набирають курсивом, грецькі - прямим, математичні позначення (sin, cos, tg, lim, ln, const, max, min, знак диференціала d) - прямим.

**До редакційної колегії потрібно подати:**

- у роздрукованому вигляді примірник статті, набраний згідно з вимогами щодо стилю й форматування для елементів статті, наведених вище;
- електронний варіант статті, набраний згідно з вимогами стосовно стилю й форматування для елементів статті, поданих вище;
- рецензію на статтю за підписом д-ра фіз.-мат. наук;
- експертний висновок про можливість публікації статті;
- довідку про оригінальність твору.

**Статті, виконані з порушенням правил, до збірника не будуть включені.**

Адреса редколегії: Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики, просп. Карла Маркса, 35, корп. №3, м. Дніпро.

## ЗМІСТ

<b>Л.Т. Бойко</b> Алгоритм використання методу межових елементів на прикладі мішаної крайової задачі для рівняння Пуассона	3
<b>Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, О.А. Падалка</b> Дослідження поведінки розв'язків диференціальних систем з відхиленням аргументу	14
<b>В.Л. Волошко</b> Оптимізація граничних умов неоднорідного бігармонічного рівняння	24
<b>Л.Л. Гарт</b> Про оцінки швидкості збіжності проекційно-ітераційних процесів умовної мінімізації функціонала	31
<b>В.Г. Городецкий, Н.П. Осадчук</b> Реконструкция системы Лоренца с использованием метода перспективных коэффициентов	47
<b>Н.А. Гук, М.К. Гук, І.П. Шаповал</b> Налаштування параметрів генетичного алгоритму для розв'язання задачі оптимізації топології сенсорної мережі	57
<b>Д.І. Єгошкін, Н.А. Гук, С.Ф. Сірик</b> Алгоритм класифікації на базі нечіткої логіки з розширюваною кількістю виводів	66
<b>Р.В. Кириленко, Н.А. Гук, О.В. Верба</b> Передбачення психологічної реакції користувача при перегляді цифрових зображень засобами машинного навчання	76
<b>О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара</b> Алгоритм розв'язання однієї задачі оптимального розбиття з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі	85
<b>О.М. Кісельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель, В.В. Шаравара</b> Розв'язання однієї нескінченновимірної задачі location-allocation із нечіткими параметрами	99
<b>О.М. Кісельова, В.О. Стросєва</b> Чисельне дослідження моделей оптимального розподілу рекреаційних ресурсів	110
<b>И.В. Козин, С.Е. Батовский</b> Генерация случайных карт прямоугольного раскроя	118

<b>О.С. Магас, О.С. Сергеев</b> Дослідження робастності розв'язків задачі маршрутизації транспорту	127
<b>В.А.Перепелица, Э.В.Терещенко, А.Е.Рябенко</b> Квазиполнота класу задач на графах «вес-минимаксное ребро»	139
<b>А.С. Титяпкин., В.Э. Волков</b> Граничные условия в задачах исследования устойчивости плоской стационарной детонационной волны	148
<b>І.С. Тонкошкур</b> Математичне моделювання плівкових течій рідини по поверхні тіла обертання	164
<b>І.С. Тонкошкур, Т.Є. Зайцева</b> Моделювання течії двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні	170
<b>В.Н. Турчин, О.А.Лоскутов, А.С.Дрожжин, Е.В. Волкова</b> К проблеме выбора имплантата тазобедренного сустава	177
<b>В.А. Турчина, К.Д. Караваев</b> Дослідження оцінок довжини паралельного упорядкування вершин графу	186
<b>В.А. Турчина, Д.О. Танасієнко</b> Застосування генетичного алгоритму до задачі складання навчального розкладу	196
<b>ДО ВІДОМА АВТОРІВ</b>	202

Наукове видання

**ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Збірник наукових праць**

**Випуск 18**

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію  
державного засобу масової інформації  
серія КВ № 23168-13008 ПР від 11.12.2017 р.

Редактор *О.М. Гордієнко*  
Комп'ютерна верстка *Н.Є. Яцечко*

---

Підписано до друку 19.10.18. Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Папір друкарський.  
Друк плоский. Гарнітура TimesNewRoman. Ум. друк. арк. 13,5.  
Тираж 100 пр. Зам. № 298.

---

Видавництво та друкарня ПП "ЛІРА ЛТД"  
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5  
Свідоцтво про внесення до Держреєстру  
ДК № 6042 від 26.02.2018